Příklad 1

Mladý Galileo Galilei při pozorování kyvů lucerny, zavěšené na dlouhém závěsu pisánského kostela (narodil se a studoval v Pise) zjistil, že perioda nezávisí na počáteční výchylce. Domníval se, že závisí na délce kyvadla l, jeho hmotnosti m a tíhovém zrychlení g. Odhadněte závislost dobu kyvu kyvadla t na těchto veličinách pomocí rozměrové analýzy. $\left[t = kl^{\frac{1}{2}}m^0g^{-\frac{1}{2}}\right]$

Příklad 2

Přesýpací hodiny odměřují čas pomocí doby, kterou se sype jemný písek uzkým hrdlem o ploše S z horní do dolní nádobky. Experimentálně můžeme zjistit, že rychlost sypání $\Delta m/\Delta t$ (hmotnost přesypaná za jednotku času) závisí na průřezu otvoru S mezi nádobami, hustotě zrnek písku ρ a (zřejmě) na tíhovém zrychlení g. Naopak, nezávisí na velikosti zrnek a množství písku. Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vztah pro rychlost sypání $\Delta m/\Delta t$ písku v hodinách $\left[\dfrac{\Delta m}{\Delta t} = kS^{\frac{5}{4}}\rho g^{\frac{1}{2}}\right]$

Příklad 3

Nemáme-li k dispozici další bližší informace, odhadujeme, že tlak v nitru hvězdy (planety) může záviset na její hmotnosti M, poloměru R, a jelikož jistě souvisí s gravitačními účinky hmoty, i na gravitační konstantě, gravitační konstanta je rovna $\varkappa = 6,672.10^{-11}$ N.m^{2}kg^{-2} . Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vzorec pro výpočet tlaku p v nitru hvězdy (planety) a odhadněte konkrétní hodnotu pro Slunce ($M_S = 1,99.10^{30}$ kg, $R_S = 696\,000$ km) a Zemi ($M_Z = 5,97.10^{24}$ kg, $R_Z = 6378$ km). $\left[p = k\kappa M^2R^{-4}\right]$

Příklad 4

U strunného hudebního nástroje víme, že frekvence, na které zní konkrétní struna souvisí s její délkou l, silou F, kterou strunu napínáme a tloušťkou struny, kterou můžeme vyjádřit pomocí hmotnosti vztažené na jednotku délky μ. Najděte pomocí rozměrové analýzy vzorec pro frekvenci struny f s využitím veličin l, F a μ. $\left[f = kl^{-1}F^{\frac{1}{2}}\mu^{-\frac{1}{2}}\right]$

Příklad 5

Startující tryskové letadlo musí mít před vzlétnutím rychlost nejméně v_1 =360 km/h. S jakým nejmenším konstantním zrychlením může startovat na rozjezdové dráze dlouhé x_1 =1,8 km ? $\left[a = \dfrac{v_1^2}{2x_1} = 2,78 \text{ m.s}^{-2}\right]$

Příklad 6

Výpravčí stojí na peróně na začátku prvního vagónu stojícího vlaku. Vlak se dá do rovnoměrně zrychleného pohybu takovým způsobem, že první vagón míjí výpravčího po dobu Δt_1. Jakou dobu Δt_n míjí výpravčího n-tý vagón? $\left[\Delta t_n = \Delta t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\right]$

Příklad 7

Student se po přednášce z fyziky vrací pěšky z Dejvic na kolej Strahov a přitom si všimne, že autobus číslo 143 jej v protisměru míjí s intervalem T_p = 10min 48 s, autobus jedoucí ve směru chůze s intervalem T_v = 13min 30 s. spočítejte

a) interval T ve kterém autobus jezdí (za předpokladu, že v obou směrech je stejný) $\left[T = \dfrac{2T_pT_v}{T_v + T_p} = 12 \text{ min}\right]$

b) poměr rychlosti β chůze studenta ku rychlosti autobusu. $\left[\beta = \dfrac{T_v + T_p}{T_v - T_p} = 9\right]$

Příklad 8

Částice se pohybuje podél osy x tak, že pro její zrychlení platí $a = a_0(1 - e^{-kt})$, kde $a_0 > 0$, $k > 0$ jsou konstanty a t je čas. V čase $t = 0$ platí $v(0) = 0, x(0) = 0$. Vypočítejte

a) rychlost částice $v(t)$ jako funkci času $\left[v = a_0 t - \frac{a_0}{k}(1 - e^{-kt})\right]$

b) polohu částice $x(t)$ jako funkci času $\left[x = \frac{1}{2}t^2 + \frac{a_0}{k^2}\left(1 - e^{-kt}\right) - \frac{a_0 t}{k}\right]$

Příklad 9

Turista na zámku Zbiroh se naklání nad studnu, přičemž mu do ní z náprsní kapsy košile vypadne mobilní telefon. Ihned zapne stopky a změří, že žuchnutí telefonu o dno uslyší za čas $t = 6,24$ s po vypadnutí telefonu. Tíhové zrychlení $g = 9,81 \mathrm{m.s^{-2}}$ a rychlost zvuku ve studni je $c = 340$ m.s^{-1}

Určete, jak hluboká je studna na zámku Zbiroh $\left[h = \frac{c^2}{4}\left(\sqrt{\frac{2}{g} + \frac{4t}{c}} - \sqrt{\frac{2}{g}}\right) = 162,8 \text{ m}\right]$

Příklad 10

Lovec v Africe chce střelit opici, která se pohupuje na větvi stromu. Vodorovná vzdálenost mezi hlavní pušky a opicí je d, svislá je h. Lovec ví, že v okamžiku kdy opice zahlédne záblesk výstřelu (což je vzhledem k rychlosti světla prakticky okamžitě) se pustí a padá volným pádem k zemi. Velikost počáteční rychlosti střely je v_0.

Pod jakým úhlem α musí lovec vystřelit, aby opici zasáhl? $\left[\tan\alpha = \frac{h}{d}\right]$

Příklad 11

Jaká je počáteční rychlost v_0 tělesa při vrhu svislém dolů z výšky h=122 m, má-li za poslední sekundu svého pohybu urazit polovinu celkové dráhy? tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81$ m.s^{-2}

$$\left[v_0 = \frac{1}{2}\sqrt{g^2 - 6gh + h^2} = 44 \text{ m.s}^{-1}\right]$$

Příklad 12

Pod jakým elevačním uhlem α musí byt vystřelená střela počáteční rychlostí $v_0 = 500$ m.s^{-1}, aby zasáhla cíl C vzdálený $x_1 = 20$ km, ve výšce $y_1 = 1$ km? tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81$ m.s^{-2} . Vypočtenou elevaci vyjádřete ve stupních.

$$\left[(\tan\alpha)_{1,2} = \frac{1}{x_1}\left[\frac{v_0^2}{g} \pm \sqrt{2\frac{v_0^2}{g}\left(\frac{v_0^2}{2g} - y_1\right) - x_1^2}\right] = \{63,2^o; 29,7^o\}\right]$$

Příklad 13

Vyplašený pásovec (na obrázku) vyskočí do výšky.

V čase 0,200 s se nachází ve výšce 0,544 m.

a) jaká je jeho počáteční rychlost v_0? $[v_0 = 3,701 \text{ m.s}^{-1}]$

b) jaká je jeho rychlost v v zadané výšce ? $[v = 1,739 \text{ m.s}^{-1}]$

c) o jakou výšku Δy ještě vyplašený pásovec nastoupá ? $[\Delta y = 0,154 \text{ m}]$

Příklad 14

Pohyb částice je určen parametricky jako $x = A_1t^2 + B_1$, $y = A_2t^2 + B_2$, kde $A_1 = 20$ cm.s^{-2}, $A_2 = 15$ cm.s^{-2}, $B_1 = 5$ cm, $B_2 = -3$ cm.

a) Určete vektor rychlosti částice v okamžiku $t = 2\,s$. $\left[\vec{v} = (80, 60)\,\text{cm.s}^{-1}\right]$

b) Určete vektor zrychlení částice v okamžiku $t = 2\,s$. $\left[\vec{a} = (40, 30)\,\text{cm.s}^{-2}\right]$

Příklad 15

Mějme kružnici o poloměru R ležící ve svislé rovině. Z jejího vrcholu vycházejí žlábky ve směru tětiv k obvodu kružnice. Do žlábku vložíme malou kuličku a vypustíme.

a) Určete čas, za který kulička dospěje na okraj kružnice. $\left[t = 2\sqrt{\frac{R}{g}}\right]$

b) Jak tento čas závisí na sklonu žlábku? [čas nezávisí na sklonu žlábku]

Úlohu poprvé řešil v 1. polovině 17.století český učenec Jan Marcus Marci z Kronlandu ve své knize *O úměrnosti pohybu.*

Příklad 16

Těleso bylo vrženo ze zemského povrchu svisle vzhůru rychlostí $v_0 = 4,9$ m.s^{-1}. Současně z výšky, kterou toto první těleso maximálně dosáhne, začíná padat druhé těleso se stejnou počáteční rychlostí. Určete čas a výšku, ve které se obě tělesa střetnou. (Tření zanedbáváme) $\left[h = \frac{7v_0^2}{32g} = 0,53\text{ m}\right]$

Příklad 17

Přímočarý pohyb se koná z klidu se zrychlením, které rovnoměrně roste tak, že v okamžiku $t_1 = 90\,\text{s}$ má hodnotu $a_1 = 0{,}5\,\text{m.s}^{-2}$. Určete:

a) závislost rychlosti a dráhy na čase, $\left[v = \frac{a_1}{2t_1}t^2\right]$ $\left[\frac{a_1}{6t_1}t^3\right]$

c) rychlost a uraženou dráhu pro čas $t = t_1$, $\left[v(t_1) = \frac{a_1}{2}t_1 = 22{,}5\,\text{m.s}^{-1}\right]$ $\left[s(t_1) = \frac{a_1}{6}t_1^2 = 675\,\text{m}\right]$

d) rychlost a uraženou dráhu pro čas $t = t_2 = 10\,\text{s}$. $\left[v(t_2) = \frac{a_1}{2t_1}t_2^2 = 0{,}26\,\text{m.s}^{-1}\right]$ $\left[s(t_2) = \frac{a_1}{6t_1}t_2^3 = 0{,}92\,\text{m}\right]$

Příklad 18

Setrvačník se otáčí s frekvencí $n = 1500\,\text{ot.min}^{-1}$. Brzděním přejde do pohybu rovnoměrně zpožděného a zastaví se za čas $t_0 = 30\,\text{s}$ od začátku brzdění. Určete

a) úhlové zrychlení ε $\left[\varepsilon = -\frac{\omega_0}{t_0} = -\frac{5}{3}\pi\,\text{s}^{-2} = -5,24\,\text{s}^{-2}\right]$

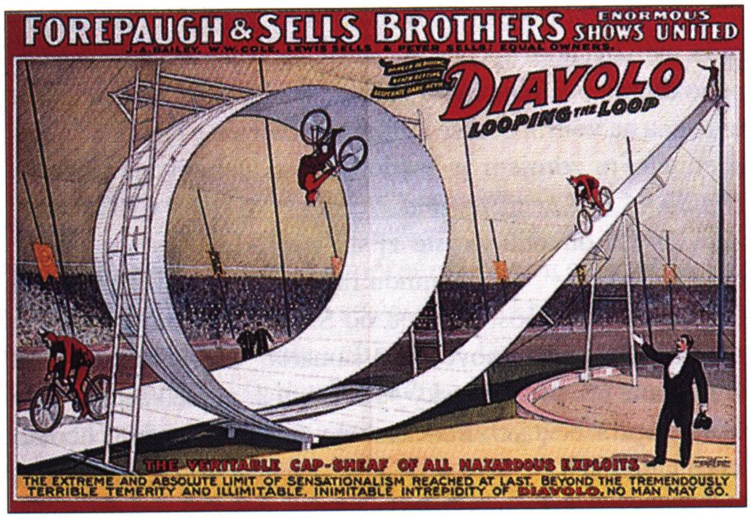
b) počet otáček N, které vykoná od začátku brzdění až do zastavení $\left[N = \frac{1}{4\pi}(\omega_0 t_0) = 375\,\text{ot}\right]$

Příklad 19

Jaká je perioda otáčení pouťové centrifugy o poloměru 5 m, jestliže v horní poloze působí na mírně vyděšeného cestujícího výsledné zrychlení a=g směrem nahoru ? Osa centrifugy je vodorovná, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81$ m.s^{-2} . $\left[\pi\sqrt{\frac{2r}{g}} = 3,17\text{ s}\right]$

Příklad 20

Během cirkusového představení v roce 1901 předvedl Allo "Dare Devil" Diavolo vrcholné číslo, jízdu na kole ve spirále smrti (viz. obr). Předpokládejte, že smyčka je kruhová a má poloměr R=2,7 m. Jakou nejmenší rychlostí v mohl Diavolo projíždět nejvyšším bodem smyčky, aby s ní neztratil kontakt? tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81$ m.s^{-2} $\left[v = \sqrt{gR} = 5,15 \text{ m.s}^{-1}\right]$



Příklad 21

Kbelík zavěšený na provázku omotaném kolem rumpálu o poloměru R padá do studny. Jeho dráha je dána vztahem $s = \frac{1}{2}kt^2$

Jaká je velikost zrychlení malého pavoučka o hmotnosti m který sedí na rumpálu? $\left[\sqrt{k^2 + \frac{k^4t^4}{R^2}}\right]$

Příklad 22

Železniční vagón se pohybuje po vodorovné přímé trati. Brzdíme jej silou, která se rovná jedné desetině jeho tíhy. V okamžiku začátku brždění má vagón rychlost 72 km.h^{-1}. tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81$ m.s^{-2} Vypočítejte

a) čas t měřený od začátku brždění za který se vagón zastaví $\left[t = \frac{10v_0}{g} = 20 \text{ s}\right]$

b) dráhu s, kterou urazí od začátku brždění do zastavení. $\left[s = \frac{5v_0^2}{g} = 200 \text{ m}\right]$

Příklad 23

Těleso se dává do pohybu působením síly F=0,02 N a za první čtyři sekundy svého pohybu urazí dráhu 3,2 m. Síla působí po celou dobu pohybu tělesa. Určete

a) Jaká je hmotnost tělesa m $\left[m = \frac{Ft^2}{2s} = 0,05 \text{ kg}\right]$

b) jakou rychlost v má na konci páté sekundy svého pohybu? $\left[v = \frac{F}{m}t = 2 \text{ m.s}^{-1}\right]$

Příklad 24

Loď se vlivem odporu prostředí pohybovala po jezeře přímočaře zpomaleně, velikost její rychlosti je popsána vztahem $v = c^2(t - t_z)^2, c > 0, 0 \leq t \leq t_z$, kde c je konstanta a t_z je čas, kdy se loď zastavila. Vypočítejte, jak závisí odporová síla F_o, která loď zabrzdila, na rychlosti. $\left[F_o = 2mc\sqrt{v}\right]$

Příklad 25

Z vrcholu dokonale hladké koule poloměru $R = 1{,}5\,\mathrm{m}$ se po jejím povrchu začne pohybovat hmotný bod. Předpokládejte, že tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81$ m.s^{-2} . Určete:

a) vertikální polohu h místa od vrcholu koule, ve kterém opustí povrch koule, $\left[h = \dfrac{R}{3} = 0,5\ \mathrm{m}\right]$

b) jakou dráhu s do toho okamžiku urazil, $\left[s = R \arccos\left(\dfrac{R-h}{R}\right) = 1{,}26\,\mathrm{m}\right]$

c) velikost rychlosti v, se kterou opustí povrch koule. $\left[v = \sqrt{2\,g\,h} = 3{,}13\,\mathrm{m.s^{-1}}\right]$

Příklad 26

Částice o hmotnosti m_1 je umístěna v počátku souřadné soustavy, částice o hmotnosti m_2 ve vzdálenosti l na ose x. Částice se vzájemně přitahují silou konstantní velikosti F. Vypočítejte

a) v jakém čase t_s se částice srazí $\left[t_s = \sqrt{\dfrac{2lm_1m_2}{F(m_1+m_2)}}\right]$

b) na jakém místě x_s se částice srazí $\left[x_s = \dfrac{lm_2}{m_1+m_2}\right]$

c) jakou vzájemnou rychlostí v_s se částice srazí $\left[v_s = \sqrt{\dfrac{2lF(m_1+m_2)}{m_1m_2}}\right]$

Příklad 27

Z cisternového vozu, který se pohybuje po vodorovných kolejích rychlostí 40 km/h, vytéká kolmo na směr pohybu vozu přepravovaná kapalina-voda stálou rychlostí 100 litrů za sekundu. Na vůz působí stálá tažná síla 1000 N (lokomotiva). Jaké rychlosti dosáhne za 10 minut? Počáteční hmotnost vagónu s vodou je 120 tun, hmotnost prázdného vagónu je 40 tun, hustota vody je $\rho_v = 1000$ kg.m^{-3} .

$\left[v(t) = \dfrac{F}{k}\ln\left(\dfrac{m_0}{m_0-kt}\right) + v_0 = 18\ \mathrm{m.s^{-1}} = 64,8\ \mathrm{km.h^{-1}}\right]$

Příklad 28

Vhodíme-li malou kuličku (brok) do vazké kapaliny, např. oleje,bude její pohyb brzdit třecí (Stokesova) síla F_S, její velikost je úměrná rychlosti pohybu a můžeme ji vyjádřit vzorcem $F_S = -kv, k > 0$. Vypočítejte závislost rychlosti kuličky o hmotnosti m na čase, pro $t = 0$ je její rychlost nulová a vztlak kapaliny můžeme zanedbat. $\left[v = \dfrac{mg}{k}\left(1 - e^{-\dfrac{kt}{m}}\right)\right]$

Příklad 29

Určete, jakou silou působí na kolejnici následkem rotace Země vlak hmotnosti $m = 500$ tun, jedoucí rychlostí $v' = 72\,\mathrm{km.h^{-1}}$ po poledníku od severu k jihu na severní polokouli v místě zeměpisné šířky $\varphi = 50^o$. $\left[2\,m\,v'\,\dfrac{2\pi}{T}\,\sin\varphi = 1114,2\ \mathrm{N}\right]$

Příklad 30

Vypočítejte práci proměnné síly $\vec{F} = (x^2-2xy)\vec{i} + (y^2-2xy)\vec{j}$ po dráze dané parametrickými rovnicemi $x = t,\ y = t^2$ (parabola) z bodu $\mathrm{A}_1(1,1)$ do bodu $\mathrm{A}_2(-1,1)$. (Síla je zadaná v newtonech) $\left[A = \dfrac{14}{15}\ \mathrm{J}\right]$

Příklad 31

Těleso o hmotnosti $m = 50$ g pohybující se rychlostí o velikosti $|\vec{v}| = 20$ m.s^{-1} narazilo na pevnou stěnu pod úhlem $\alpha = 60^o$. Jakou průměrnou silou $< F >$ působilo na stěnu, šlo-li o pružný ráz a trval-li náraz $0,1\,s$? $\left[\langle F\rangle = \frac{1}{t}[m.|\vec{v}|.\cos\alpha - m(-|\vec{v}|)\cos\alpha] = 10\,N\right]$

Příklad 32

Jakou práci je třeba vykonat, aby vlak hmotnosti m=300 t, pohybující se po vodorovné trati, zvětšil svou rychlost z v_1=36 km.h^{-1} na v_2=54 km.h^{-1} ? Neuvažujeme ztráty třením a vliv odporu vzduchu. [$A = 18,75$ MJ]

Příklad 33

Raketa o hmotnosti 20 t dosáhne výšky 5 km za 10 s. Jaký je výkon jejích motorů ? $\left[\frac{mgh}{\Delta t} = 98{,}1 \text{ MW}\right]$

Příklad 34

Po zachycení střely se poloha těžiště balistického kyvadla zvýší o $l = 2$ cm. Určete rychlost střely v. Hmotnost střely je rovna $m = 20$ g, hmotnost balistického kyvadla je rovna $M = 10$ kg.

$$\left[v = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gl} = 313,8 \text{ m.s}^{-1}\right]$$

Příklad 35

Dvě loďky plují na klidné (neproudící) vodě proti sobě rovnoběžným směrem. Když se míjejí, vymění si vzájemně stejně těžký pytel hmotnosti M=50 kg. Následkem toho se druhá loďka zastaví a první se pohybuje dále v původním směru rychlostí u_1=8,5 m.s^{-1}. Stanovte rychlosti v_1 a v_2 loděk před tím, než si vyměnily pytle. Hmotnosti loděk i s pytlem jsou m_1=1000 kg, m_2=500 kg.

$$\left[v_1 = \frac{u_1 m_1 (M - m_2)}{M(m_1+m_2) - m_1 m_2} = 9 \text{ m.s}^{-1}\right] \quad \left[v_2 = \frac{m_1 M u_1}{M(m_1+m_2) - m_1 m_2} = -1 \text{ m.s}^{-1}\right]$$

Příklad 36

Dřevěná tyč délky l=0,4 m a hmotnosti m=1 kg se může otáčet kolem osy, která je na tyč kolmá a prochází jejím středem. Na konec tyče narazí střela hmotnosti m_1=0,01 kg rychlostí v_1=200 m.s^{-1} kolmo na tyč i osu. Určete počáteční úhlovou rychlost pohybu tyče, když v ní střela uvízne.

$$\left[\omega = \frac{6 m_1 v_1}{ml + 3m_1 l} = 29,1 \text{ rad.s}^{-1}\right]$$

Příklad 37

Tágo bouchne do středu kulečníkové koule, takže se tato začne po stole smýkat rychlostí o počáteční velikosti v_0. Koeficient smykového tření mezi plátnem stolu a koulí je μ. Díky tření se koule postupně roztáčí, až se začne pohybovat čistě valivým pohybem (kutálet). Jakou konečnou rychlostí v_1 se bude koule kutálet? $\left[v_1 = \frac{5}{7}v_0\right]$

Příklad 38

Na ocelovou podložku upustíme z výšky h =1 m dvě ocelové koule. Horní koule má hmotnost m_1=50 g, dolní m_2 =300 g.

a) Do jaké výšky h_1 se odrazí horní (lehčí) koule? $\left[h_1 = \left(\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h = 5{,}9\ \text{m}\right]$

b) Do jaké výšky h_2 se odrazí dolní (těžší) koule? $\left[h_2 = \left(\frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h = 0{,}18\ \text{m}\right]$

c) Pro jaký poměr hmotností $k = m_2/m_1$ vyskočí horní koule nejvýše? $[k \to \infty]$

d) Jaká je tato maximální výška? $[9h = 9\ \text{m}]$

Příklad 39

Částice α (jádro hélia $^4_2$He) se ve srážkovém experimentu odrazila od neznámého atomového jádra. Při srážce ztratila tato částice 75% své kinetické energie. Srážka byla pružná a probíhala po přímce.

Jakou hmotnost M má neznámé atomové jádro?

$[M = 3m]$

Příklad 40

Clověk o hmotnosti m=75 kg stojí na loďce o délce l= 2m a hmotnosti M=25 kg. O jakou vzdálenost s se posune vzhledem ke břehu, když přejde z jednoho konce loďky na druhý? Předpokládejte, že odpor vody je možné zanedbat.

$\left[s = \frac{ML}{m + M} = 0{,}5\ \text{m}\right]$

Příklad 41

Z děla o hmotnosti M, které se může volně pohybovat po vodorovné zemi byl vystřelen projektil o hmotnosti m. Vypočítejte směr (elevační úhel α') počáteční rychlosti projektilu, jestliže nastavený elevační úhel děla byl α. $\left[\tan\alpha' = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha\right]$

Příklad 42

Jakou rychlostí musí narazit střela hmotnosti m kolmo na spodní konec svisle zavěšené tyče hmotnosti M a délky l, aby ji vychýlila o úhel 90^o? Střela v tyči uvázne. $\left[\frac{1}{m}\sqrt{gl(2m + M)\left(m + \frac{1}{3}M\right)}\right]$

Příklad 43

Dřevěná tyč délky l=0,4 m a hmotnosti m=1 kg se může otáčet kolem osy, která je na tyč kolmá a prochází jejím středem. Na konec tyče narazí střela hmotnosti m_1=0,01 kg rychlostí v_1=200 m.s^{-1} kolmo na tyč i osu. Určete počáteční úhlovou rychlost pohybu tyče, když v ní střela uvízne.

$\left[\omega = \frac{6m_1v_1}{ml + 3m_1l} = 29{,}1\ \text{rad.s}^{-1}\right]$

Příklad 44

Sáňky jedou z kopce rovnoměrně zrychleně po dráze AB a pod svahem rovnoměrně zpožděně po vodorovné dráze BC, na které se zastaví. Určete koeficient tření. Úhel $\alpha = 10^o$, dráhy AB=$s_1 = 1000$ m, BC=$s_2 = 100$ m. $\left[\mu = \frac{s_1\sin\alpha}{s_2 + s_1\cos\alpha} = 0{,}16\right]$

Příklad 45

Dřevěný hranol o hmotě $m_2 = 3$ kg leží na vodorovné podložce. Je zasažen střelou o hmotě $m_1 = 5$ g. Střela v něm zůstane a hranol se posune po podložce o 25 cm. Koeficient tření mezi hranolem a podložkou je 0,2. Vypočítejte rychlost střely. $\left[\dfrac{m_1 + m_2}{m_1}\sqrt{2ks_0g} = 600\ \mathrm{m.s^{-1}}\right]$

Příklad 46

Střela o hmotnosti $m = 10$ g byla vypálena do krabice s pískem o hmotnosti $M = 2$ kg ležící na vodorovné podložce a zasekla se v ní a posunula ji o vzdálenost $l = 25$ cm. Koeficient smykového tření mezi krabicí a podložkou $\mu = 0{,}2$, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}$. Vypočítejte

a) rychlost střely $\left[v = \dfrac{m + M}{m}\sqrt{2\mu g l} = 199\ \mathrm{m.s^{-1}}\right]$

b) dobu pohybu krabice $\left[t_z = \sqrt{\dfrac{2l}{\mu g}} = 0,5\ \mathrm{s}\right]$

Příklad 47

Určete nejmenší koeficient smykového tření μ mezi koly automobilu a asfaltem, aby vůz mohl projet zatáčkou poloměru $r = 200\,\mathrm{m}$ rychlostí $v = 100\,\mathrm{km.h^{-1}}$,tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}$. $\left[\mu > \dfrac{v^2}{rg} = 0,39\right]$

Příklad 48

Po nakloněné rovině s úhlem sklonu α se smýká směrem dolů předmět tak, že jeho rychlost je konstantní. Jakou velikost má koeficient smykového tření mezi předmětem a nakloněnou rovinou? $[\mu = \tan\alpha]$

Příklad 49

V obci, kde je povolená maximální rychlost $v_{max} = 50\ \mathrm{km.h^{-1}}$ přejelo auto slepici. Na silnici jsou vidět stopy po brzdění smykem, které mají délku $l = 39$ m. (Auto mělo zřejmě nefunkční ABS.) Policista vyšetřující nehodu ví, že koeficient smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami je $\mu = 0,5$. Jakou jel automobil rychlostí v okamžiku, než začal brzdit? $\left[v = \sqrt{2\mu g l}\right]$

Příklad 50

Homogenní nosník hmotnosti $m = 5$ tun a délky $l = 10$ metrů spočívá na dvou podpěrách. Ve vzdálenosti $x = 2$ metry od jednoho konce je zatížen hmotností $m_1 = 1$ tuna. Určete síly reakce v obou podpěrách na koncích nosníku, tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

$\left[F_1 = \dfrac{G\,l + 2\,G_1\,(l - x)}{2\,l} = 32373\ \mathrm{N}\right]$ $\left[F_2 = \dfrac{G}{2} + G_1\dfrac{x}{l} = 26487\ \mathrm{N}\right]$

Příklad 51

Závaží o hmotnosti m je zavěšeno na laně podepřeném vodorovnou vzpěrou. Pro úhel, který svírá vzpěra a lano, platí $\alpha = 30^o$. Hmotnost lana a vzpěry lze zanedbat. Vypočítejte

a) velikost tahové síly, T_n, kterou je napínáno lano nad vzpěrou $[T_n = 2mg]$

b) velikost tlakové síly T_v, kterou je namáhána vzpěra $\left[T_v = \sqrt{3}mg\right]$

c) velikost tahové síly T_p, kterou je natahováno lano pod vzpěrou $[T_p = mg]$

Příklad 52

U stěny je postaven žebřík. Jeho koeficient tření o stěnu je $f_1 = 0,55$, o zem $f_2 = 0,8$. Určete minimální úhel vzhledem k horizontální rovině, při kterém žebřík nespadne působením vlastní váhy.
$\left[\alpha = \arctan\left(\frac{1\ -\ f_1\, f_2}{2\, f_2}\right) = 19,29^o\right]$

Příklad 53

Určete polohu těžiště homogenní polokoule poloměru $R = 2$ m. $\left[\left[0, 0, \frac{3}{8}R\right] = \left[0, 0, \frac{3}{4}\right]\right]$

Příklad 54

Do jakého místa je nejlepší umístit nohu ke stolu s půlkruhovou homogenní deskou o poloměru R?
$\left[y_T = \frac{4R}{3\pi}\right]$

Příklad 55

Určete polohu těžiště tenké tyčky délky l , jejíž lineární hustota τ lineárně vzrůstá od τ_1 do τ_2.
$\left[\frac{l}{3}\,\frac{\tau_1 + 2\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}\right]$

Příklad 56

Určete polohu těžiště homogenního rotačního kužele o výšce H a poloměru R. $\left[\frac{3}{4}H\right]$

Příklad 57

Určete moment setrvačnosti homogenní tyče délky $d = 1$ m a hmotnosti $m = 1$ kg vzhledem k ose

a) která prochází středem tyče kolmo na její směr $\left[\frac{1}{12}md^2 = \frac{1}{12}\ \mathrm{kg.m^2} \doteq 0,0833\ \mathrm{kg.m^2}\right]$

b) na konci tyče kolmé na její směr $\left[\frac{1}{3}md^2 = \frac{1}{3}\ \mathrm{kg.m^2} \doteq 0,33\ \mathrm{kg.m^2}\right]$

Příklad 58

Určete moment setrvačnosti tyčky délky l a hmotnosti m rotující kolem osy kolmé k tyčce a procházející

a) jejím koncem $\left[\frac{1}{3}ml^2\right]$

b) ve vzdálenosti $l/4$ od konce $\left[\frac{7}{48}ml^2\right]$

c) středem tyče $\left[\frac{1}{12}ml^2\right]$

Příklad 59

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního válce o hmotnosti m, poloměru R a výšce h vzhledem k ose, která je kolmá k jeho geometrické ose a prochází středem válce. $\left[J = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2\right]$

Příklad 60

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního kužele poloměru R a hmotnosti M. $\left[\frac{3}{10}MR^2\right]$

Příklad 61

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenní koule poloměru R a hmotnosti m vzhledem k ose procházející jejím středem. $\left[\frac{2}{5}m\,\mathrm{R}^2\right]$

Příklad 62

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního dutého válce o poloměrech r_1,r_2, výšce l a hmotnosti M vzhledem k jeho ose rotační symetrie. $\left[\frac{1}{2}M(r_1^2 + r_2^2)\right]$

Příklad 63

Rotor elektromotoru s hmotností m=110 kg má moment setrvačnosti J=2 kg.m^2 a koná f=20 otáček za sekundu. Jak velkou má kinetickou energii? $\left[T = 2\pi^2 Jf^2 = 15,8\ \mathrm{kJ}\right]$

Příklad 64

Setrvačník má vodorovný hřídel o poloměru 0,005 m. Působením tíhové síly závaží o hmotnosti m =2 kg, které táhne za provaz desetktrát navinutý na hřídeli, roztočí se setrvačník tak, že se otáčí s frekvencí f=20 otáček za sekundu. Určete jeho moment setrvačnosti,tíhové zrychlení je rovno $g = 9,81$ m.s^{-2} . $\left[\frac{10mgr}{\pi f^2} = 7,5.10^{-4}\ \mathrm{kg.m^2}\right]$

Příklad 65

Závaží o hmotnosti $m = 1$ kg je zavěšeno na vlákně namotaném na plném ocelovém válci o poloměru $r = 0.5$ m a délce $l = 1$ m. Válec se může otáčet kolem vodorovné osy bez tření. Za jak dlouho sjede závaží o čtyři metry dolů. Závaží i válec jsou na počátku v klidu, hustota oceli je $\rho = 7500$ kg.m^{-3}

$$\left[t = \sqrt{\frac{y(2m + \rho\pi r^2 l)}{mg}} = 48,54\ \mathrm{s}\right]$$

Příklad 66

Setrvačné kolo momentu setrvačnosti $J = 540$ kg.m^2 je z klidu roztáčeno momentem síly, který roste úměrně s časem tak, že v čase $t_1 = 10$ s dosáhne hodnoty $M_1 = 100$ N.m. Určete frekvenci, které dosáhne v čase $t_2 = 72$ s. $\left[\frac{M_1 t_2^2}{4\pi J t_1} = 7,65\ \mathrm{Hz}\right]$

Příklad 67

Z bodu A nakloněné roviny úhlu α se začne valit beze smyku homogenní válec. Určete jeho rychlost v bodě B a čas potřebný k proběhnutí dráhy $s = \overline{\mathrm{AB}}$. $\left[v = 2\sqrt{\frac{g\,s\,\sin\alpha}{3}}\right]$ $\left[t = \sqrt{\frac{3s}{g\,\sin\alpha}}\right]$

Příklad 68

Popíšeme pohyb stacionární družice Země, hmotnost Země je rovna $M_z = 5,983.10^{24}$ kg , střední poloměr Země je roven $R_z = 6373$ km , gravitační konstanta je rovna $\varkappa = 6,672.10^{-11}$ N.m^{2}kg^{-2} . vypočítejte

a) vzdálenost h stacionární družice od povrchu Země $\left[\sqrt[3]{\frac{\varkappa M_z T^2}{4\pi^2}} - R_z = 35\,592 \text{ km}\right]$

b) oběžnou rychlost v této družice $\left[\sqrt[6]{\frac{4\pi^2\varkappa^2 M_z^2}{T^2}} = 3073 \text{ m.s}^{-1}\right]$

Příklad 69

Jupiterův měsíc Io obíhá po trajektorii s velkou poloosou a_I=421800 km s periodou T_I=1,769 dne. Zemský Měsíc obíhá po trajektorii s velkou poloosou a_M=2,55.10^{-3} AU s periodou T_M=27,322 dne. Určete z těchto údajů poměr hmotností Jupitera a Země. Astronomická jednotka 1 AU je rovna 149,598.10^6 km. $\left[\frac{M_J}{M_Z} = \frac{T_M^2\, a_I^3}{T_I^2\, a_M^3} = 315\right]$

Příklad 70

Vzdálenost Měsíce od středu Země se mění od r_{MP}=363300 km v perigeu do r_{MA}=405500 km v apogeu, perioda oběhu Měsíce kolem Země je T_M=27,322 dne. Umělá družice se pohybuje po eliptické dráze nad rovníkem tak, že v perigeu je ρ_{DP}=225 km nad povrchem Země a v apogeu je ρ_{DA}=710 km. Rovníkový poloměr Země je R_Z=6378 km. Určete periodu oběhu umělé družice T_D.

$$\left[T_M\sqrt{\left(\frac{\rho_{DA}+\rho_{DP}+2R_Z}{r_{MA}+r_{MP}}\right)^3} = 0,0649 \text{ dne} = 1{,}56 \text{ h} = 1 \text{ h } 34 \text{ min}\right]$$

Příklad 71

V jaké vzdálenosti od středu Země r_1 je na spojnici Země-Měsíc velikost gravitační síly působící na těleso o hmotnosti m nulová? Vzdálenost Země-Měsíc je d, pro hmotnost Měsíce použijte $M_M = M_Z/81$.

$\left[r_1 = \frac{9}{10}d\right]$

Příklad 72

Najděte takovou vzdálenost h, aby ve výšce h nad zemí a v hloubce h pod zemí byla gravitační síla stejná. $\left[\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)R_z\right]$

Příklad 73

Jaká je frekvence netlumeného harmonického pohybu hmotného bodu hmotnosti m =2 g, je-li amplituda $A = 10$ cm a celková energie hmotného bodu $W = 1$ J ? $\left[\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{W}{2mA^2}} = 50,35 \text{ Hz}\right]$

Příklad 74

Jaký je logaritmický dekrement útlumu Λ tlumeného harmonického oscilátoru, jestliže za čas 10 s trvání pohybu hmotný bod ztratí 50 % své mechanické energie. Perioda tlumeného pohybu je T=2 s. $\left[-\frac{\ln\frac{1}{2}}{2t}T = 0,0693\right]$

Příklad 75

Těleso visí na pružině a kmitá s periodou T = 0,5 s. O kolik se pružina zkrátí odstraněním tělesa? $\left[g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = 6,2 \text{ cm}\right]$

Příklad 76

Kruhová deska koná ve svislém směru kmitavý harmonický pohyb s amplitudou A = 0,75 m. Jaká může být maximální frekvence kmitání desky, aby se předmět volně uložený na desku od ní neoddělil? $\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}} = 0,575 \text{ Hz}\right]$

Příklad 77

Pozorováním tlumeného harmonického kmitavého pohybu se zjistilo, že po dvou za sebou následujících výchylkách na stejnou stranu se amplituda kmitů zmenšila o 6/10 a že doba kmitu T= 0,5 s. Určete součinitel tlumení δ a logaritmický dekrement útlumu Λ. $\left[\delta = -\frac{\ln\frac{4}{10}}{T} = 1,833 \text{ s}^{-1}\right]$ $[\Lambda = \delta T = 0,916]$

Příklad 78

Nalezněte amplitudu A a fázi ψ výsledného harmonického pohybu $u = A\sin(\omega t + \psi)$, který vznikne složením dvou kmitavých pohybů ve stejné přímce se stejnou periodou, $u_1 = A_1\sin(\omega t + \varphi_1), u_2 = A_2\sin(\omega t + \varphi_2)$ amplitudami $A_1 = 3$ cm, $A_2 = 5$ cm a fázemi $\varphi_1 = 0^o$, $\varphi_2 = 60^o$

$$\left[\sqrt{(A_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + A_2^2\sin^2\varphi_2} = 7 \text{ cm}\right]$$

$$\left[\arcsin\left(\frac{A_2\sin\varphi_2}{\sqrt{(A_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + A_2^2\sin^2\varphi_2}}\right) = 38,2132^o = 38^o12'47'' \doteq 0,667 \text{ rad}\right]$$

Příklad 79

Nalezněte amplitudu a fázi výsledného harmonického pohybu $u = A\cos(\omega t+\varphi)$, který vznikne složením dvou kmitavých pohybů ve stejné přímce $u_1 = A_1\cos(\omega\ t + \varphi_1), u_2 = A_2\cos(\omega\ t + \varphi_2)$ $A_1 = A_2 = 5$ cm, fáze $\varphi_1 = 30^o$, $\varphi_2 = 60^o$. $\left[A_1\sqrt{2[1+\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]} = 9,66 \text{ cm}\right]$

$$\left[\arccos\frac{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2}{\sqrt{2[1+\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]}} = \arcsin\frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\sqrt{2[1+\cos(\varphi_1 - \varphi_2)]}} = 45^o = \frac{\pi}{4} \text{ rad}\right]$$

Příklad 80

Nalezněte rovnici kmitu, který vznikl složením dvou navzájem kolmých kmitů. Uveďte název křivky.

$$x = \sin\omega t, \tag{1}$$

$$y = 4\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{2}$$

a dráhu nakreslete.

Příklad 81

Na pružnou spirálu zavěsíme na spodním konci závaží hmotnosti značně větší než je hmotnost spirály. Při tom se spirála protáhne o 4 cm. S jakou frekvencí bude soustava kmitat, udělíme-li jí ve svislém směru impuls ? $\left[\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_0}} = 2,51 \text{ Hz}\right]$

Příklad 82

Mobilní telefon spadne do kanálu, který ústí na druhé straně Země. Za jak dlouho se telefon vrátí? střední poloměr Země je roven $R_z = 6373$ km , hmotnost Země je rovna $M_z = 5,983.10^{24}$ kg . Hustotu Země budeme pokládat za konstantní, gravitační konstanta je rovna $\varkappa = 6,672.10^{-11}$ N.m^{2}kg^{-2}

$$\left[t = 2\pi\sqrt{\frac{R_z^3}{\varkappa M_z}} = 5059 \text{ s} = 1 \text{ h } 24 \text{ min} 19 \text{ s}\right]$$

Příklad 83

Mezi dvěma místy na Zemi vykopeme přímý tunel, umístíme do něj vlak a jeho pohon svěříme gravitaci. Pokud bychom mohli zanedbat tření a odpor prostředí, jak dlouho by trvala cesta od jednoho konce tunelu ke druhému? Uvažujte, že Země je homogenní.

$$\left[T_p = \sqrt{\frac{R_z^3}{\kappa M_z}}\right]$$

Příklad 84

Určete dobu kmitu kapaliny, která je nalita do trubice tvaru U tak, že celková délka sloupce kapaliny je $l = 1$ m. $g = 9,81$ m.s^{-2} $\left[T = \pi\sqrt{\frac{2l}{g}} = 1,42 \text{ s}\right]$

Příklad 85

Vodorovná deska koná kmitavý pohyb v horizontálním směru s periodou $T = 5$ s. Závaží ležící na desce se začne smýkat v okamžiku, kdy amplituda kmitů dosáhne velikosti $A_0 = 0,5$ m. Jaký je koeficient smykového tření μ mezi závažím a deskou? $\left[\mu = \frac{4\pi^2 A_0}{T^2 g} = 0,080\right]$

Příklad 86

Za jak dlouho se energie kmitavého pohybu ladičky s frekvencí $f = 435$ Hz zmenší $n = 10^6$ krát? Jaký je činitel jakosti ladičky? Logaritmický dekrement útlumu je roven $\Lambda = 8.10^{-4}$. $\left[t = \frac{\ln n}{2\Lambda f} = 19,84 \text{ s}\right]$ $\left[Q = \frac{\pi}{\Lambda} = 3927\right]$

Příklad 87

Na svisle postavenou pružinu umístíme kuličku o hmotnosti $m = 0,1$ kg. Pružinu tím stlačíme o vzdálenost $\Delta s = 2$ mm. Pružinu dále stlačíme o $s_1 = 15$ cm a náhle pustíme. Do jaké výšky pružina kuličku kolmo vzhůru vystřelí? Hmotnost pružiny můžeme zanedbat. $\left[h = \frac{1}{2}\frac{s_1^2}{\Delta s}\right]$

Příklad 88

Dvě závaží o hmotnostech m_1 a m_2 jsou spojena pružinou o tuhosti k. Vypočítejte periodu kmitů tohoto systému za předpokladu, že na něj nepůsobí vnější síly a že pohyb je jednorozměrný.

$\left[T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}\right]$

Příklad 89

Určete vlnovou délku de Broghliovy vlny elektronu, který byl urychlen průchodem potenciálním rozdílem U=100 V. Hmotnost elektronu je $m_e = 9,101.10^{-31}$ kg, náboj elektronu je e = 1,602.10^{-19} C, Planckova konstanta je $h = 6,62607.10^{-34}$ J.s . $\left[\frac{h}{\sqrt{2eUm_e}} = 1,23.10^{-10}\ \mathrm{m}\right]$

Příklad 90

Vypočtěte energii fotonu o vlnové délce λ=700 nm. Výsledek vyjádřete v Joulech a v elektronvoltech. Planckova konstanta je $h = 6,62607.10^{-34}$ J.s , rychlost světla ve vakuu je $c = 3.10^8$ m.s^{-1}

$\left[W = \frac{hc}{\lambda} = 2,84.10^{-19}\ \mathrm{J} = 1,77\ \mathrm{eV}\right]$

Příklad 91

Elektron v urychlovači získá energii W =100 MeV. Vypočítejte jeho vlnovou délku λ a kmitočet f

Planckova konstanta je $h = 6,62607.10^{-34}$ J.s , rychlost světla ve vakuu je $c = 3.10^8$ m.s^{-1} , náboj elektronu je $e = -1,602.10^{-19}$ C $\left[\lambda = \frac{hc}{E} = 1,24.10^{-14}\ \mathrm{m}\right]$ $\left[f = \frac{E}{h} = 2,42.10^{22}\ \mathrm{Hz}\right]$

Příklad 92

Za příznivých okolností může lidské oko zaregistrovat $E = 10^{-18}$ joulů elektromagnetické energie. Vypočítejte, kolik je to fotonů světla oranžové barvy (s vlnovou délkou λ=600 nm).

Planckova konstanta je $h = 6,62607.10^{-34}$ J.s , rychlost světla ve vakuu je $c = 3.10^8$ m.s^{-1} , náboj elektronu je $e = -1,602.10^{-19}$ C $\left[N = \frac{E\lambda}{hc} = 3\right]$

Příklad 93

Radiový vysílač o výkonu P=1000 W pracuje na kmitočtu f =880 kHz. Kolik fotonů za vteřinu emituje?

Za příznivých okolností může lidské oko zaregistrovat $E = 10^{-18}$ joulů elektromagnetické energie. Vypočítejte, kolik je to fotonů světla oranžové barvy (s vlnovou délkou λ=600 nm). Planckova konstanta je $h = 6,62607.10^{-34}$ J.s . $\left[N = \frac{P}{hf} = 1,71.10^{30}\right]$

Příklad 94

Kolik fotonů za vteřinu emituje destiwattová žlutá žárovka? Předpokládejme monochromatické světlo s vlnovou délkou $\lambda = 580$ nm.

Planckova konstanta je $h = 6,62607.10^{-34}$ J.s rychlost světla ve vakuu je $c = 3.10^8$ m.s^{-1} $\left[N = \frac{P\lambda}{hc} = 2,9^{19}\right]$

Část příkladů převzata s laskavým svolením autora z M. Červenka: *263 problémů z mechaniky, elektřiny a magnetismu*. Sbírka je dostupná na http://herodes.feld.cvut.cz/sbirka/sbirka/spapzmem.pdf