

# Zpracování fyzikálních měření

Studijní text pro fyzikální praktikum



Milan Červenka, katedra fyziky FEL-ČVUT  
*milan.cervenka@fel.cvut.cz*  
23. ledna 2013

Obrázek na titulní straně pochází z knihy o geometrii a měření od Jacoba Köbela (1460 – 1533). Zobrazuje „statistické“ určení délky 1 rod = 16 stop.

Děkuji prof. Ing. Ondřeji Jiříčkovi, CSc., doc. Ing. Karlu Malinskému, CSc. a Ing. Karlu Řezáčovi za pozorné přečtení textu a četné připomínky.

## Obsah

<b>1</b>	<b>Opravdu jen pár slov na úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Chyby měření</b>	<b>1</b>
2.1	Náhodné chyby . . . . .	2
2.2	Systematické chyby . . . . .	2
2.3	Podrobněji k náhodným chybám a jejich popisu . . . . .	3
2.4	Intermezzo – náhodné veličiny a jejich popis . . . . .	5
2.4.1	Rovnoměrné rozdělení . . . . .	6
2.4.2	Normální rozdělení . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Nejistoty měření</b>	<b>7</b>
3.1	Určení nejistoty měření metodou typu A . . . . .	8
3.2	Určení nejistoty měření metodou typu B . . . . .	8
3.2.1	Určení nejistoty z rozlišení přístroje . . . . .	9
3.2.2	Určení nejistoty u ručkového měřicího přístroje . . . . .	9
3.2.3	Určení nejistoty u digitálního měřicího přístroje . . . . .	9
3.3	Kombinovaná standardní nejistota . . . . .	10
3.3.1	Některé důležité vzorce . . . . .	12
3.4	Interpretace standardní nejistoty a nejistota rozšířená . . . . .	13
3.4.1	Co přesně vyjadřuje standardní nejistota . . . . .	13
3.4.2	Rozšířená nejistota . . . . .	14
3.4.3	Je to složitější . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Prezentace výsledku měření</b>	<b>15</b>
4.1	Fyzikální veličiny a jejich jednotky . . . . .	15
4.2	Platné cifry . . . . .	16
4.3	Zápis výsledku měření . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Příklad</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>Metoda nejmenších čtverců</b>	<b>19</b>
6.1	Aproximace přímkou . . . . .	20
6.2	Aproximace známou mocninou . . . . .	22
6.3	Aproximace exponenciálou . . . . .	23
6.4	Aproximace polynomem $m$ -tého stupně . . . . .	24
6.5	Složitější případy . . . . .	26
6.6	Posouzení kvality aproximace . . . . .	26
6.7	Když neznáme nejistoty vstupních dat . . . . .	27
6.8	Poznámka – vážený průměr . . . . .	28

<b>7</b>	<b>Další metody</b>	<b>28</b>
7.1	Metoda postupných měření . . . . .	28
7.2	Metoda redukce . . . . .	29
<b>A</b>	<b>Dodatek</b>	<b>31</b>
A.1	Studentovo rozdělení . . . . .	31
A.2	Některé fyzikální konstanty . . . . .	34
A.3	Nonius . . . . .	35

*Fyzika je ze své podstaty experimentální vědní disciplína. Měření a jejich nejistoty jsou klíčem ke každému experimentu a každému objevu.*

*Walter Lewin, For the Love of Physics, 2011*

## 1 Opravdu jen pár slov na úvod

Fyzikální měření je, od nepaměti bylo a vždy bude nedílnou součástí vědy a techniky a je základem fyziky. Bez přesného měření a důmyslných metod zpracování naměřených dat by nebylo možné studovat fyzikální zákony, vytvářet jejich obsah, případně je revidovat anebo dokonce provádět nové objevy.

Fyzikální měření hrají klíčovou roli prakticky ve všech oborech lidské činnosti, kde umožňují zajišťovat jakost a kontrolu kvality, funkčnost a bezpečnost technologií a podobně. Setkáváme se s nimi i v netechnických oborech, jako jsou například obchod a sport.

V následujícím textu je relativně stručně pojednáno o nedílné součásti každého měření – o chybách měření, o postupech zpracování naměřených hodnot zajišťujících alespoň částečnou eliminaci chyb měření a v neposlední řadě o určování a vyjadřování nejistot výsledků měření. Podrobnosti laskavý čtenář nalezne v citované literatuře. Některé pracnější výpočty popsané v tomto textu (například odhad regresních parametrů a jejich nejistot metodou nejmenších čtverců) jsou implementovány v jazyce PHP a volně dostupné prostřednictvím webové stránky

<http://herodes.feld.cvut.cz/mereni/>

věnované podpoře výuky ve fyzikální laboratoři katedry fyziky FEL-ČVUT.

## 2 Chyby měření

Fyzikální měření je proces, při kterém je zjišťována číselná hodnota nějaké fyzikální veličiny (teploty, hmotnosti, náboje, ...) ve stanovených jednotkách. Předpokládáme přitom, že tato veličina má jistou *skutečnou hodnotu*. K měření používáme přístroje, které, bez ohledu na jejich důmyslnost, nejsou dokonalé. Měřená veličina se může mírně měnit s časem, případně může být ovlivněna procesem měření. Tyto a další okolnosti zapříčiňují, že nalézt skutečnou hodnotu měřené veličiny není možné. Ke skutečné hodnotě je však možné se alespoň přiblížit, pokud použijeme co nejpřesnější přístroje a přesně vyspecifikujeme a zkorigujeme vliv prostředí a samotného měření na její hodnotu.

Rozdíl mezi naměřenou s skutečnou hodnotou měřené veličiny nazýváme *chybou měření*

$$\text{chyba měření} = \text{naměřená hodnota} - \text{skutečná hodnota.} \quad (1)$$

Jelikož zjistit skutečnou hodnotu měřené veličiny není možné, není možné určit ani chybu měření. Jak bylo řečeno výše, chyby měření jsou zapříčiňeny použitím nepřesných měřicích přístrojů a neznalostí přesného stavu prostředí a jeho vlivu na měřenou veličinu. Dělíme je do dvou hlavních skupin na *chyby náhodné* a *chyby systematické*, pokud odhlédneme od *chyb hrubých*, způsobených například přehlédnutím, vadnými přístroji nebo jejich nesprávným použitím, kdy příslušné výsledky nebereme při dalším zpracování v úvahu.

## 2.1 Náhodné chyby

Náhodné chyby mají nekonstantní charakter a projevují se tím, že pokud provedeme opakované měření jedné veličiny tímž měřicím přístrojem za stejných podmínek<sup>1</sup>, naměříme různé hodnoty. Tyto různé hodnoty způsobuje vliv mnoha malých (neřiditelných) změn podmínek měření (elektromagnetické rušení, změny teploty, tlaku a vlhkosti vzduchu, pohyb vzduchu, otřesy) na měřicí přístroj či měřenou veličinu, případně změna měřené veličiny samotné a v neposlední řadě i nedokonalost smyslů experimentátora. Náhodné chyby nelze zcela eliminovat, neboť není možné zcela vyloučit drobné změny podmínek měření, jejich vliv lze pouze zmírnit. Odhad skutečné hodnoty měřené veličiny (jak bude uvedeno dále) provádíme s využitím metod matematické statistiky obvykle tak, že z více opakovaných měření vypočteme aritmetický průměr, čímž se vliv náhodných chyb částečně vyruší, zpravidla tím víc, čím víc je opakovaných měření provedeno.

Nicméně, většinou nemá smysl měření opakovat *velmi mnohokrát* (například automatizovaným sběrem dat za použití PC), neboť měření mimo jiné ovlivňuje přesnost použitých přístrojů a chyby systematické, jejichž vliv opakovaným měřením korigovat nelze.

## 2.2 Systematické chyby

Systematické chyby se vyznačují tím, že mají konstantní charakter v tom smyslu, že nezapříčiňují různé hodnoty při měření jedné veličiny za stejných podmínek stejným měřicím přístrojem.

Častým zdrojem těchto chyb je měřicí přístroj, který nemá přesně nastavenou (má posunutou) nulovou hodnotu a v důsledku toho zobrazuje menší (větší) hodnotu oproti hodnotě měřené, přičemž rozdíl mezi měřenou a zobrazovanou hodnotou je konstantní, chyba je tedy *aditivní*. Systematická chyba může být i *multiplikativní*, například v případě, kdy zesílení měřicího přístroje nemá přesně deklarovanou hodnotu.

Zdrojem systematických chyb může být i nevhodně zvolená metoda měření.

**Několik konkrétních příkladů:** Při měření elektromotorického napětí zdroje s vnitřním odporem, jehož velikost je nezanedbatelná oproti vnitřnímu odporu použitého voltmetru, neměříme napětí zdroje, ale napětí na děličce tvořené vnitřními odpory zdroje a voltmetru. Při znalosti velikostí obou odporů je možné provést korekci.

Při určování hmotnosti objektu vážením je třeba vzít v úvahu vztlakovou sílu na něj působící, pokud jeho hustota není výrazně vyšší oproti hustotě vzduchu. Při znalosti obou hustot můžeme provést příslušnou korekci.

Systematické chyby lze odhalit například použitím jiných (přesnějších) měřicích přístrojů či opakováním měření více nezávislými metodami založenými na odlišných fyzikálních principech, což v mnoha případech vyžaduje jisté zkušenosti experimentátora. Poté, co je systematická chyba odhalena, je možné její vliv eliminovat změnou uspořádání experimentu, kalibrací příslušného přístroje, případně použitím korekce (aditivní nebo multiplikativní).

V dalším textu budeme předpokládat, že systematické chyby se podařilo eliminovat či korigovat a zaměříme se na zpracování chyb náhodných.

---

<sup>1</sup>Stejných do té míry, kterou jsme schopni zajistit.

## 2.3 Podrobněji k náhodným chybám a jejich popisu

Jak bylo řečeno výše, náhodné chyby bývají zapříčiněny působením mnoha faktorů, které jsou často samostatně neměřitelné. Podle tzv. *hypotézy o elementárních chybách* jsou navzájem nezávislé, hodnotu měřené veličiny mohou zvětšovat i zmenšovat a jejich vliv se sčítá. Odtud vyplývá, že náhodné chyby mají níže uvedené vlastnosti.

- Velké chyby (ať už kladné či záporné) jsou méně časté, nežli chyby malé. Aby došlo k velké chybě, muselo by mnoho *navzájem nezávislých* faktorů působit současně „stejným směrem“, což je málo pravděpodobné.
- Kladné a záporné hodnoty náhodných chyb jsou víceméně stejně pravděpodobné – pravděpodobnost jejich výskytu je reprezentována sudou funkcí.

**Příklad s házením mincemi.** Výše uvedené vlastnosti náhodných chyb můžeme velice názorně demonstrovat níže uvedeným myšlenkovým (anebo opravdovým, pokud nevěříte . . .) experimentem.

Vezmeme  $N$  mincí, které vyhodíme do vzduchu a necháme spadnout na zem, přičemž po každém hodu budeme počítat skóre tak, že za každého orla si připočteme jeden bod a za každou pannu si jeden bod odečteme. V každém hodu tedy můžeme získat maximálně  $N$  a minimálně  $-N$  bodů. V případě dvou mincí mohou nastat tyto kombinace:

Kombinace	PP	PO	OP	OO
Skóre	-2	0	0	2

Pravděpodobnost skóre  $-2$  je  $1/4$  (jedna ze čtyř kombinací vede na toto skóre) pravděpodobnost skóre  $0$  je  $1/2$  (dvě ze čtyř) a pravděpodobnost skóre  $2$  je opět  $1/4$ . V případě tří mincí mohou nastat tyto kombinace:

Kombinace	PPP	PPO	POP	POO	OPP	OPO	OOP	OOO
Skóre	-3	-1	-1	1	-1	1	1	3

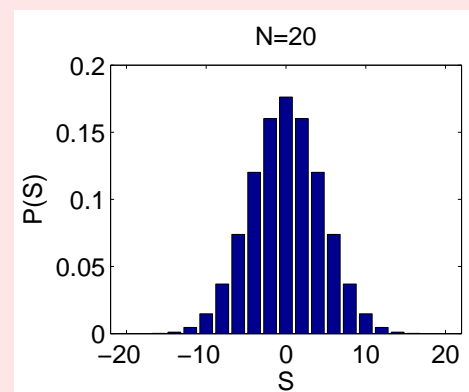
Pro pravděpodobnosti možných skóre tedy dostáváme  $P(-3) = 1/8$ ,  $P(-1) = 3/8$ ,  $P(1) = 3/8$  a  $P(3) = 1/8$ .

Obecně pro  $N$  mincí může nastat  $2^N$  výsledků, z nichž ovšem některé mají stejná skóre. Pravděpodobnost, že padne  $n_o$  orlů můžeme spočítat jako

$$P_o(n_o) = \frac{1}{2^N} \binom{N}{n_o} = \frac{N!}{2^N n_o! (N - n_o)!},$$

přičemž pro skóre zřejmě platí  $S = 2n_o - N$ . Takže například pro  $N = 20$  mincí pro pravděpodobnost maximálního (minimálního) skóre platí  $P(20) = P(-20) = 2^{-20} \approx 10^{-6}$ , což je pravděpodobnost velice malá, neboť těchto výsledků lze dosáhnout jen jedním způsobem. Pro nulové skóre platí  $P(0) \approx 0,176$ , neboť tohoto výsledku lze dosáhnout 184 756 způsoby. Rozdělení pravděpodobnosti pro jednotlivá skóre je uvedeno na obrázku 1.

Skóre v tomto příkladě počítáme jako součet výsledků nezávislých jevů (padne orel nebo pana u každé z mincí). Pravděpodobnost vysokého skóre (v absolutní hodnotě) je velice malá v porovnání s pravděpodobností nízkého skóre, kladná i záporná skóre jsou stejně pravděpodobná.



Obrázek 1: Rozdělení pravděpodobnosti dosažení skóre  $S$ .

Budeme-li  $N$ -krát opakovaně měřit veličinu  $X$ , dostaneme její  $i$ -tou hodnotu jako

$$x_i = x_s + \epsilon_i,$$

kde  $x_s$  je skutečná hodnota měřené veličiny a  $\epsilon_i$  je náhodná chyba  $i$ -tého měření<sup>2</sup>

Vypočítáme součet

$$\sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N (x_s + \epsilon_i) = Nx_s + \sum_{i=1}^N \epsilon_i \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = x_s + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i. \quad (2)$$

Jelikož předpokládáme, že kladné chyby jsou stejně pravděpodobné jako chyby záporné, bude platit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \epsilon_i = 0,$$

takže dosazením do vztahu (2) dostaneme

$$x_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (3)$$

skutečnou hodnotu bychom tedy vypočetli jako aritmetický průměr *všech možných naměřených hodnot*. Jelikož prakticky máme k dispozici pouze  $N$  naměřených hodnot (kde  $N$  je konečné), odhadneme skutečnou hodnotu pomocí aritmetického průměru těchto hodnot

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4)$$

Je zřejmé, že  $\bar{x}$  se blíží  $x_s$  tím více, čím větší je  $N$ .

**Poznámka: Metoda nejmenších čtverců.** Představme si, že opakovaným měřením veličiny  $X$  jsme dostali hodnoty  $x_1, x_2, \dots, x_N$ , které se v důsledku náhodných chyb od sebe navzájem liší, a chtěli bychom najít nějakou hodnotu  $\bar{x}$ , která bude co nejlépe odpovídat hodnotě skutečné. Můžeme to udělat tak, že definujeme veličinu

$$\chi^2 \equiv (\bar{x} - x_1)^2 + (\bar{x} - x_2)^2 + \dots + (\bar{x} - x_N)^2,$$

což je součet druhých mocnin (neboli čtverců, odtud název metody) „vzdálenosti“ jednotlivých hodnot  $x_i$  od hledané hodnoty  $\bar{x}$ . Tato veličina by tedy měla být minimální. Najdeme extrém:

$$\frac{d\chi^2}{d\bar{x}} = 2(\bar{x} - x_1) + 2(\bar{x} - x_2) + \dots + 2(\bar{x} - x_N) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad N\bar{x} = x_1 + x_2 + \dots + x_N,$$

jelikož  $d^2\chi^2/d\bar{x}^2 = 2N > 0$ , jedná se o minimum. Odtud pro hledanou hodnotu  $\bar{x}$  dostaneme vztah

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

což není nic jiného, než aritmetický průměr.

<sup>2</sup>Jak bylo řečeno výše, nezahrnujeme zde vliv systematických chyb.

Kromě odhadu skutečné hodnoty měřené veličiny aritmetickým průměrem  $\bar{x}$  je důležité nějak popsat variabilitu naměřených hodnot. Je zřejmé, že pokud budou jednotlivé hodnoty  $x_i$  ležet v úzkém intervalu kolem  $\bar{x}$ , bude výsledek měření „jistější“, než kdyby byl příslušný interval široký.

K tomuto účelu nelze použít aritmetický průměr odchylek naměřených hodnot od aritmetického průměru, neboť platí

$$\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^N x_i - N\bar{x} = \sum_{i=1}^N x_i - \sum_{i=1}^N x_i = 0. \quad (5)$$

Bylo by tedy možné sčítat absolutní hodnoty těchto odchylek, nicméně se ukazuje, že je praktičtější sčítat jejich druhé mocniny. Zavádí se tedy tzv. *odhad směrodatné odchylky* (*výběrová směrodatná odchylka*)  $s$ , jejíž druhá mocnina (tzv. *výběrový rozptyl*) je definována předpisem

$$s^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2. \quad (6)$$

Platí tedy

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (7)$$

Důvod výrazu  $N-1$  ve jmenovateli vzorců (6) a (7) namísto  $N$ , jak by se na první pohled zdálo logické, je ten, že veličiny  $\Delta_i = x_i - \bar{x}$  (jichž je celkem  $N$ ) nejsou navzájem nezávislé, neboť můžeme vzhledem ke vztahu (5) například psát

$$\Delta_N = - \sum_{i=1}^{N-1} \Delta_i.$$

Velichiny  $\Delta_i$  tedy mají pouze  $\nu = N-1$  stupňů volnosti. Detailnější rozbor je možné nalézt např. v [1] a [4].

## 2.4 Intermezzo – náhodné veličiny a jejich popis

Pro účely dalšího výkladu bude na tomto místě vhodné věnovat několik odstavců náhodným veličinám (výsledek měření zatížený náhodnou chybou je náhodná veličina) a jejich popisu. Budeme se zde zabývat pouze náhodnými veličinami spojitými, které mohou (alespoň v určitém intervalu) nabývat libovolných hodnot.

K úplnému pravděpodobnostnímu popisu náhodné veličiny  $X$  slouží tzv. *hustota pravděpodobnosti* náhodné veličiny  $f_X$ , pomocí níž lze spočítat, s jakou pravděpodobností nabývá veličina hodnotu v určitém intervalu

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(u) du. \quad (8)$$

Hustota pravděpodobnosti je nezáporná funkce, pro kterou zřejmě platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) du = 1,$$



veličina  $X$  má tedy s pravděpodobností rovnou jedné nějakou hodnotu. Pomocí hustoty pravděpodobnosti lze spočítat některé význačné charakteristiky náhodných veličin. Střední hodnota (ve smyslu „průměrná“) je definována předpisem

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} u f_X(u) du. \quad (9)$$

Rozptyl (variabilita) náhodné veličiny je definován předpisem

$$\sigma^2 = \text{Var}[X] = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \mu)^2 f_X(u) du. \quad (10)$$

Veličinu  $\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]} = \sqrt{E[(X - \mu)^2]}$  nazýváme směrodatná odchylka.

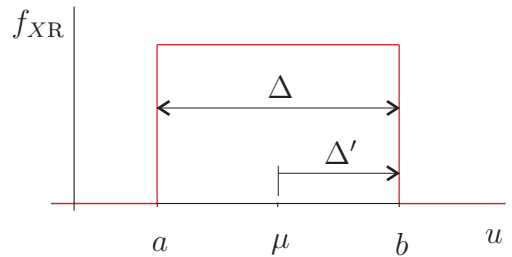
### 2.4.1 Rovnoměrné rozdělení

Náhodná veličina má rovnoměrné rozdělení na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pokud pro její hustotu pravděpodobnosti platí

$$f_{XR}(u) = \begin{cases} (b - a)^{-1} & \text{pro } u \in \langle a, b \rangle, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases} \quad (11)$$

Snadno se přesvědčíme, že platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{XR}(u) du = \frac{1}{b - a} \int_a^b du = 1.$$



Obrázek 2: Rovnoměrné rozdělení.

Pro střední hodnotu dostaneme

$$\mu_{XR} = \int_{-\infty}^{\infty} u f_{XR}(u) du = \frac{1}{b - a} \int_a^b u du = \frac{a + b}{2},$$

střední hodnota tedy leží přesně uprostřed intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Pro rozptyl dostaneme

$$\sigma_{XR}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (u - \mu_{XR})^2 f_{XR} du = \frac{1}{b - a} \int_a^b \left(u - \frac{a + b}{2}\right)^2 du = \frac{(b - a)^2}{12}.$$

Označíme-li šířku intervalu  $\langle a, b \rangle$  jako  $\Delta = b - a$ , můžeme pro směrodatnou odchylku rovnoměrného rozdělení psát

$$\sigma_{XR} = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}. \quad (12)$$

Směrodatná odchylka rovnoměrného rozdělení se také často vyjadřuje pomocí poloviny šířky intervalu  $\langle a, b \rangle$ , označme jej  $\Delta' = (b - a)/2$ . Pak platí

$$\sigma_{XR} = \sqrt{\frac{(2\Delta')^2}{12}} = \frac{\Delta'}{\sqrt{3}}. \quad (13)$$

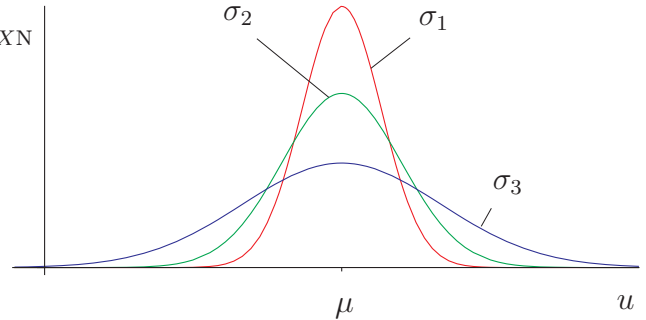
## 2.4.2 Normální rozdělení

Normální, nebo též Gaussovo, rozdělení má pro zpracování (nejen) fyzikálních měření klíčovou důležitost.

V teorii pravděpodobnosti se dokazuje věta (tzv. *centrální limitní věta*, viz např. [7]), která v podstatě říká, že hustota pravděpodobnosti veličiny, jejíž hodnotu lze vyjádřit jako součet hodnot *mnoha nezávislých*, ale jinak *libovolných* náhodných veličin, je dána funkcí

$$f_{XN}(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (14)$$

Dá se ukázat<sup>3</sup>, že pro střední hodnotu a směrodatnou odchylku normálního rozdělení platí  $f_{XN}$   $\mu_{XN} = \mu$ ,  $\sigma_{XN} = \sigma$ . Funkce  $f_{XN}(u)$  má tvar zvonu, je symetrická kolem střední hodnoty  $\mu$ , ve které má maximum, viz obr. 3. Čím je směrodatná odchylka  $\sigma$  menší, tím má funkce  $f_{XN}(u)$  „štíhlejší a protáhlejší“ tvar, což znamená, že se hodnoty náhodné veličiny  $X$  vyskytují s větší pravděpodobností v užším intervalu kolem střední hodnoty  $\mu$ .



Obrázek 3: Normální rozdělení,  $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$ .

Často je třeba znát pravděpodobnost, se kterou má náhodná veličina hodnotu v intervalu  $(\mu - k\sigma \leq x \leq \mu + k\sigma)$ , kde  $k > 0$  je nějaký koeficient (tzv. *koeficient rozšíření*). Postupně dostaneme

$$P(\mu - k\sigma \leq x \leq \mu + k\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mu-k\sigma}^{\mu+k\sigma} e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^k e^{-u^2/2} du = \text{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right), \quad (15)$$

kde funkce erf je tzv. *chybová funkce*<sup>4</sup> (error function). V tabulce 1 jsou uvedeny některé důležité hodnoty

$k$	0,674	1	1,96	2	2,576	3
$P$	0,5	0,683	0,95	0,954	0,99	0,997

Tabulka 1: Pravděpodobnost  $P(\mu - k\sigma \leq x \leq \mu + k\sigma)$  pro normální rozdělení.

Praktická zkušenost a fakt, že hypotéza o náhodných chybách je v souladu s předpoklady centrální limitní věty nás vede k závěru, že náhodné chyby mají normální rozdělení, takže střední hodnota  $\mu = x_s$  a směrodatná odchylka odhadovaná vztahem (7) je směrodatnou odchylkou normálního rozdělení.

## 3 Nejistoty měření

Skutečnost, že každé fyzikální měření je zatíženo (náhodnými a systematickými) chybami, které se nikdy nedají zcela eliminovat, zapříčiňuje, že výsledek měření není nikdy úplně jistý, můžeme jej tedy formulovat pomocí vztahu

$$\text{výsledek měření} = \text{odhad skutečné hodnoty} \pm \text{nejistota měření}, \quad (16)$$

<sup>3</sup>Výpočet těchto integrálů již není elementární, využívá Laplaceův integrál  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ , viz např. [7].

<sup>4</sup>Tuto takzvaně vyšší transcendentní funkci běžně znají programové balíky, jako např. Matlab nebo Maple.

kteřý říká, že skutečná hodnota měřené veličiny se s jistou mírou pravděpodobnosti nachází v okolí její odhadnuté hodnoty v intervalu daném *nejistotou měření*.

V metrologii se rozlišují dva typy metod určování nejistot, tzv. *metoda typu A* a *metoda typu B*. Někdy se zkráceně (a nepřesně) hovoří o *nejistotě typu A* a *nejistotě typu B*. Jednotlivé příspěvky k celkové nejistotě měření se vyjadřují pomocí odhadu směrodatných odchylek, neboli tzv. *standardních nejistot*.

### 3.1 Určení nejistoty měření metodou typu A

Metoda typu A určování nejistot využívá matematickou statistiku. V případě opakovaných měření se postupuje následujícím způsobem. Z  $N$  naměřených hodnot odhadneme skutečnou hodnotu měřené veličiny pomocí aritmetického průměru  $\bar{x}$ , viz vztah (4). Jednotlivé naměřené hodnoty  $x_i$  jsou v okolí hodnoty  $\bar{x}$  rozptýleny, přičemž mírou tohoto rozptýlení je odhad směrodatné odchylky  $s$ , viz vztah (7). Aritmetický průměr je však také náhodná veličina, o čemž bychom se snadno přesvědčili, kdybychom  $N$  měření a příslušné výpočty provedli opakovaně. Dá se očekávat, že čím větší je počet měření v dané sérii ( $N$ ), tím méně se budou jednotlivé aritmetické průměry od sebe lišit a budou méně rozptýleny kolem skutečné hodnoty měřené veličiny. Jestliže jednotlivé hodnoty  $x_i$  nejsou vzájemně korelované<sup>5</sup>, pro odhad směrodatné odchylky aritmetického průměru platí, viz poznámka na straně 13,

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{N}}. \quad (17)$$

Veličina  $\bar{s}$  udává míru nejistoty v odhadu skutečné hodnoty měřené veličiny a je standardní nejistotou určenou metodou typu A. Značíme ji  $u_A$  a dosazením vztahu (7) do (17) pro ni dostaneme

$$u_A = \bar{s} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}}. \quad (18)$$

Stejně jako je aritmetický průměr z naměřených hodnot náhodná veličina, je náhodná veličina i standardní nejistota (odhad směrodatné odchylky). Dá se ukázat, viz např. [1], že pro *nejistotu odhadu nejistoty* platí

$$u[u(x)] \sim \frac{u(x)}{\sqrt{2\nu}}, \quad (19)$$

kde  $\nu$  je počet stupňů volnosti, tedy pro případ aritmetického průměru platí  $\nu = N - 1$ . Přímým dosazením do vzorce (19) je možné se například přesvědčit, že pro relativní nejistotu odhadu nejistoty aritmetického průměru určeného z  $N = 10$  hodnot platí  $u[u(x)]/u(x) \approx 24\%$ .

Jiným příkladem vyhodnocení nejistoty metodou typu A je odhad směrodatných odchylek regresních parametrů v metodě nejmenších čtverců, viz odstavec 6.

### 3.2 Určení nejistoty měření metodou typu B

Metoda typu B je založena na procedurách jiných, než statistických. Určení nejistoty metodou typu B využívá všechny dostupné informace, například specifikace dodané výrobcem měřicího přístroje, dříve získaná data, zkušenosti z předchozích experimentů a podobně. Standardní nejistota se opět vyjadřuje jako odhad směrodatné odchylky. Uvedme několik příkladů.

<sup>5</sup>To by nastalo například při postupném nárůstu (poklesu) hodnoty měřené veličiny.

### 3.2.1 Určení nejistoty z rozlišení přístroje

Nemáme-li žádné bližší informace o použitém měřicím přístroji, můžeme vyjít z jeho rozlišovací schopnosti<sup>6</sup>. Jestliže je tato rozlišovací schopnost  $\Delta$  (reprezentovaná např. rozlišením displeje, velikostí dílku stupnice či rozlišením nonia, viz dodatek A.3), dá se očekávat, že měřená veličina má hodnotu nacházející se se stejnou pravděpodobností kdekoli v intervalu  $\pm\Delta/2$  kolem zobrazované hodnoty. Chyba měření má tedy rovnoměrné rozdělení, viz odstavec 2.4.1. Směrodatnou odchylku (standardní nejistotu určenou metodou typu B) tedy odhadneme pomocí vztahu (12) jako

$$u_B = \frac{\Delta}{\sqrt{12}}. \quad (20)$$

### 3.2.2 Určení nejistoty u ručkového měřicího přístroje

Přesnost ručkových měřicích přístrojů se vyjadřuje pomocí tzv. *třídy přesnosti* TP. Jedná se o maximální relativní velikost chyby přístroje (vyjádřenou v procentech) při výchylce ručky v krajní poloze stupnice. Třída přesnosti bývá uvedena číselnou hodnotou zpravidla pod stupnicí měřicího přístroje, normalizovány jsou hodnoty 0,1; 0,2; 0,5; 1; 1,5; 2,5; 5. Pro standardní nejistotu měření tedy platí (s ohledem na fakt, že měřená veličina má zřejmě hodnotu kdekoli v daném intervalu)

$$u_B = \frac{2 \times (\text{rozsah přístroje}) \times TP/100}{\sqrt{12}} = \frac{(\text{rozsah přístroje}) \times TP/100}{\sqrt{3}}. \quad (21)$$

### 3.2.3 Určení nejistoty u digitálního měřicího přístroje

U digitálních měřicích přístrojů výrobce obvykle udává maximální chybu měření jako

$$\pm p\% \text{ z naměřené hodnoty} \pm n \text{ digitů},$$

kde  $p$  je kladné číslo a pojmem  $n$  digitů se myslí  $n$ -násobek rozlišovací schopnosti přístroje. Hodnota měřené veličiny se se stejnou pravděpodobností nachází kdekoli v daném intervalu, takže pro standardní nejistotu můžeme psát

$$u_B = \frac{2 \times (p\% \text{ z naměř. hod.} + n \text{ digitů})}{\sqrt{12}} = \frac{p\% \text{ z naměř. hod.} + n \text{ digitů}}{\sqrt{3}}. \quad (22)$$

**Pár příkladů: Posuvné měřítko**, které má na noniu 50 dílků má rozlišení  $1/50 \text{ mm} = 20 \mu\text{m}$ . Standardní nejistotu tedy dostaneme dosazením do vzorce (20) jako

$$u_B = \frac{20 \mu\text{m}}{\sqrt{12}} \approx 5,8 \mu\text{m}.$$

**Ručkový miliampérmetr** má rozsah 600 mA a třídu přesnosti 0,5. To znamená, že přesnost indikované hodnoty je

$$\pm 600 \times \frac{0,5}{100} \text{ mA} = \pm 3 \text{ mA}.$$

<sup>6</sup>Zde je však třeba jisté obezřetnosti. Nesolidní výrobci měřicích přístrojů často používají jemné dělení stupnice (rozlišení displeje), které neodpovídá přesnosti daného přístroje.

Dosažením do vzorce (21) dostaneme standardní nejistotu jako

$$u_B = \frac{3}{\sqrt{3}} \text{ mA} \approx 1,7 \text{ mA}.$$

**3 1/2-místný digitální multimetr MY-64** má podle specifikace výrobce na rozsahu 20 V stejnosměrných přesnost

$$\pm(0,5\% \text{ z údaje} + 1 \text{ digit}).$$

Displej přístroje na tomto rozsahu zobrazuje maximálně hodnotu 19,99 V, jeden digit má tedy velikost 0,01 V. Zobrazuje-li přístroj tedy například hodnotu 12,69 V, je přesnost zobrazované hodnoty napětí

$$\pm \left( 12,69 \times \frac{0,5}{100} + 0,01 \right) \text{ V} = \pm 73,5 \text{ mV}.$$

Standardní nejistotu dostaneme dosažením do vzorce (22) jako

$$u_B = \frac{73,5}{\sqrt{3}} \text{ mV} \approx 42 \text{ mV}.$$

### 3.3 Kombinovaná standardní nejistota

Často je třeba určit odhad a nejistotu veličiny  $Z$ , která je funkcí více veličin, např.  $X, Y$ , přičemž je dána funkční závislost

$$Z = f(X, Y). \quad (23)$$

Jestliže skutečné hodnoty veličin  $X$  a  $Y$  jsou  $x_s$  a  $y_s$ , bude zřejmě platit  $z_s = f(x_s, y_s)$ . Při  $i$ -tém měření každé z veličin se dopustíme chyby. Budou-li tyto chyby *malé*, můžeme chybu určení veličiny  $Z$  formulovat pomocí Taylorova rozvoje vztahu (23) jako

$$z_i - z_s \approx \left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)_{x_s, y_s} (x_i - x_s) + \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \right)_{x_s, y_s} (y_i - y_s). \quad (24)$$

Pro rozptyl veličiny  $Z$  (teoreticky vypočtený z nekonečně mnoha naměřených hodnot) potom platí

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - z_s)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)_{x_s, y_s} (x_i - x_s) + \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \right)_{x_s, y_s} (y_i - y_s) \right]^2 = \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)_{x_s, y_s}^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_s)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \right)_{x_s, y_s}^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - y_s)^2 + \\ &\quad + 2 \left( \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial f}{\partial Y} \right)_{x_s, y_s} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_s)(y_i - y_s). \quad (25) \end{aligned}$$

Budou-li chyby veličin  $X$  a  $Y$  nekorelované, tedy při  $i$ -tém měření  $x_i - x_s$  a  $y_i - y_s$  nebudou mít soustavně stejná znaménka (to nastane v případě *nezávislých měření*), bude pro jejich *kovarianci*

platit

$$\sigma_{XY}^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_s)(y_i - y_s) = 0,$$

takže vzorec (25) přejde do jednoduššího tvaru

$$\sigma_Z^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial X} \right)_{x_s, y_s}^2 \sigma_X^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial Y} \right)_{x_s, y_s}^2 \sigma_Y^2. \quad (26)$$

Výše uvedené vzorce můžeme zobecnit a použít pro odhad nejpravděpodobnější hodnoty veličiny  $Z = f(X_1, X_2, \dots, X_M)$ , pro kterou se obvykle používá vztah

$$\bar{z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M) \quad (27)$$

a kombinované standardní nejistoty  $u_c(Z)$ , pro kterou s ohledem na vztah (26) můžeme psát

$$u_c^2(Z) = \sum_{i=1}^M \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)_{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M}^2 u^2(X_i). \quad (28)$$

Vztah (28) platí opět pouze za předpokladu, že chyby veličin  $X_1, X_2, \dots, X_M$  jsou navzájem ne-korelované. Zdrojem korelací by například mohlo být použití jednoho přístroje se systematickou chybou pro měření dvou či více veličin. Jiným zdrojem korelací je měření veličin, které jsou na sobě závislé<sup>7</sup>. V případě, že některé veličiny jsou závislé, je třeba do vzorce (28) zahrnout i příslušné kovariance<sup>8</sup>. U nejistot  $u(X_i)$  se nerozlišuje mezi nejistotami vyhodnocovanými metodou typu A či B.

Zejména při počítačovém zpracování je někdy jednodušší určit kombinovanou standardní nejistotu měření (28) numericky pomocí vzorce

$$u_c^2(Z) = \left[ \frac{f[\bar{x}_1 + u(X_1), \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M] - f[\bar{x}_1 - u(X_1), \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M]}{2} \right]^2 + \\ + \left[ \frac{f[\bar{x}_1, \bar{x}_2 + u(X_2), \dots, \bar{x}_M] - f[\bar{x}_1, \bar{x}_2 - u(X_2), \dots, \bar{x}_M]}{2} \right]^2 + \\ + \dots + \left[ \frac{f[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M + u(X_M)] - f[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_M - u(X_M)]}{2} \right]^2. \quad (29)$$

### Poznámka – kombinovaná standardní nejistota u přímého měření

Kombinovanou standardní nejistotu zavádíme i v případě přímého měření, což lze ilustrovat na následujícím příkladu. Opakovaným měřením veličiny  $X$  můžeme vypočítat aritmetický průměr  $\bar{x}'$  a výběrovou směrodatnou odchylku aritmetického průměru, která reprezentuje standardní nejistotu „typu A“, kterou označíme  $u_A$ . Nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny vypočteme jako

$$\bar{x} = \bar{x}' + k,$$

<sup>7</sup>Například, budeme-li chtít stanovit hustotu nějakého objektu, změříme nezávisle jeho hmotnost a objem, tato měření jsou nezávislá. Budeme-li měřit teplotní součinitel délkové roztažnosti, musíme *současně* měřit teplotu a délku vzorku, tato měření jsou závislá (délka se s teplotou mění).

<sup>8</sup>Je asi zřejmé, že v tomto případě musí být všechny veličiny měřeny *současně* za stejných podmínek.

kde  $k$  je korekce na systematickou chybu (například měřicího přístroje). Tuto chybu nelze fakticky korigovat s přesností větší, než je přesnost měřicího přístroje, která je zpravidla charakterizována standardní nejistotou „typu B“ –  $u_B$ . Pro kombinovanou standardní nejistotu veličiny  $X$  tedy můžeme psát

$$\begin{aligned} X = X' + K \quad \Rightarrow \quad u_C^2(X) &= \left(\frac{\partial X}{\partial X'}\right)^2 u^2(X') + \left(\frac{\partial X}{\partial K}\right)^2 u^2(K) = \\ &= u^2(X') + u^2(K) = u_A^2 + u_B^2 \quad \Rightarrow \quad u_C = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}. \quad (30) \end{aligned}$$

Poslední vzorec používáme pro kombinování standardních nejistot A a B i v případě, kdy je korekce na systematickou chybu nulová. V případě, kdy jedna ze složek nejistoty má výrazně vyšší hodnotu než složka druhá, můžeme hodnotu menší složky zanedbat.

### 3.3.1 Některé důležité vzorce

Pomocí vztahu (28) se za předpokladu vstupních veličin s nekorelovanými chybami snadno odvodí následující vzorce

$$\begin{aligned} Z = X + a \quad &\Rightarrow \quad u(Z) = u(X), \\ Z = aX \pm bY \quad &\Rightarrow \quad u^2(Z) = a^2u^2(X) + b^2u^2(Y), \\ Z = XY \quad &\Rightarrow \quad u^2(Z) = \bar{y}^2u^2(X) + \bar{x}^2u^2(Y) \quad \Rightarrow \quad u^2(Z)/\bar{z}^2 = u^2(X)/\bar{x}^2 + u^2(Y)/\bar{y}^2, \\ Y = X^a \quad &\Rightarrow \quad u(Y) = |a\bar{x}^{a-1}|u(X) \quad \Rightarrow \quad u(Y)/|\bar{y}| = |a|u(X)/|\bar{x}|, \\ Z = X/Y \quad &\Rightarrow \quad u^2(Z) = u^2(X)/\bar{y}^2 + \bar{x}^2u^2(Y)/\bar{y}^4 \quad \Rightarrow \quad u^2(Z)/\bar{z}^2 = u^2(X)/\bar{x}^2 + u^2(Y)/\bar{y}^2, \\ Y = e^{aX} \quad &\Rightarrow \quad u(Y) = |a|e^{a\bar{x}}u(X) \quad \Rightarrow \quad u(Y)/|\bar{y}| = |a|u(X), \\ Y = \ln(aX) \quad &\Rightarrow \quad u(Y) = u(X)/\bar{x}. \end{aligned}$$

#### Příklad: Nejistota určení tíhového zrychlení

Tíhové zrychlení  $g$  můžeme změřit tak, že z výšky  $h$  necháme padat malou kuličku a budeme odečítat dobu jejího pádu  $t$ . Z opakovaných měření vypočteme aritmetické průměry  $\bar{h}$  a  $\bar{t}$  a (případně s využitím dalších informací) standardní nejistoty  $u(h)$  a  $u(t)$ . Jelikož platí

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{2h}{t^2},$$

odhadneme tíhové zrychlení jako

$$\bar{g} = \frac{2\bar{h}}{\bar{t}^2}.$$

Vypočítáme jednotlivé derivace

$$\frac{\partial g}{\partial h} = \frac{2}{t^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{4h}{t^3}$$

a dosadíme je do vztahu (28), takže pro standardní nejistotu odhadu tíhového zrychlení dostaneme

$$u(g) = \sqrt{\frac{4}{\bar{t}^4}u^2(h) + \frac{16\bar{h}^2}{\bar{t}^6}u^2(t)}.$$

**Poznámka: Směrodatná odchylka aritmetického průměru [odvození vzorce (17)].** Počítáme-li aritmetický průměr z  $N$  naměřených, navzájem nekorelovaných hodnot

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots + x_N),$$

můžeme na hodnotu  $\bar{x}$  nahlížet jako na hodnotu náhodné veličiny  $\bar{X}$ , pro kterou platí

$$\bar{X} = \frac{1}{N}(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = f(X_1 + X_2 + \dots + X_N).$$

Platí-li pro odhad směrodatné odchylky *všech* náhodných veličin  $s_i = s$ , můžeme pro odhad směrodatné odchylky aritmetického průměru psát

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = \frac{1}{N} \Rightarrow \bar{s}^2 = N \frac{s^2}{N^2} = \frac{s^2}{N} \Rightarrow \bar{s} = \frac{s}{\sqrt{N}}.$$

### 3.4 Interpretace standardní nejistoty a nejistota rozšířená

Cílem fyzikálního měření je, kromě stanovení nejlepšího odhadu skutečné hodnoty měřené veličiny, rovněž pravděpodobnostní interpretace odhadu standardní nejistoty jakožto míry „úspěchu“ měření.

#### 3.4.1 Co přesně vyjadřuje standardní nejistota

Odhad směrodatné odchylky získaný z opakovaných měření obvykle spojujeme<sup>9</sup> s normálním rozdělením pravděpodobnosti náhodných chyb. To znamená, viz vztah (15) a tabulka 1, že zhruba 68% z naměřených hodnot bude ležet v intervalu  $\pm\sigma$  kolem skutečné hodnoty  $x_s$  měřené veličiny.

Vypočítáme-li aritmetický průměr z mnoha jednotlivých měření, můžeme očekávat, že  $\bar{x} \approx x_s$  a  $s \approx \sigma$  a proto zhruba 68 % naměřených hodnot bude ležet v intervalu

$$(\bar{x} - s) \leq x \leq (\bar{x} + s).$$

Obdobně, kdybychom opakovali *celý* experiment mnohokrát ( $N$ -krát), mohli bychom očekávat, že jednotlivé aritmetické průměry  $\bar{x}$  mají normální rozdělení<sup>10</sup> symetrické kolem skutečné hodnoty  $x_s$  se směrodatnou odchylkou  $\sigma_{\bar{x}} \approx \bar{s} \approx s/\sqrt{N}$ . Opět tedy můžeme předpokládat, že zhruba 68 % vypočtených aritmetických průměrů bude ležet v intervalu

$$(x_s - \bar{s}) \leq \bar{x} \leq (x_s + \bar{s}).$$

Jsme-li přesvědčeni, že jsme měření provedli dostatečně pečlivě a kompenzovali všechny systematické chyby, můžeme provést *logický skok* a předpokládat, že *pokud rozdělení pravděpodobnosti je zhruba normální a  $u_c$  má mnoho stupňů volnosti*, skutečná hodnota měřené veličiny leží s pravděpodobností zhruba 68 % v intervalu

$$(\bar{x} - u_c) \leq x_s \leq (\bar{x} + u_c), \tag{31}$$

<sup>9</sup>Vede nás k tomu zkušenost.

<sup>10</sup>To vyplývá z centrální limitní věty; výpočet aritmetického průměru je normovaný součet náhodných veličin.



kde  $u_c$  je kombinovaná standardní nejistota měřené veličiny. Interval definovaný vztahem (31) nazýváme šedesátiosmiprocentní interval spolehlivosti.

### 3.4.2 Rozšířená nejistota

I když je nejistota měření zcela určena pomocí kombinované standardní nejistoty  $u_c$ , v některých případech (zejména v technických aplikacích) je zvykem vyjadřovat nejistotu spojenou s širším intervalem spolehlivosti, než jak definuje vztah (31), takovým způsobem, aby v něm skutečná hodnota ležela s vyšší pravděpodobností, nejčastěji 95% či 99%. Za tímto účelem zavádíme tzv. *rozšířenou nejistotu*  $U$  definovanou vztahem

$$U \equiv ku_c, \quad (32)$$

kde  $k$  je tzv. *koeficient rozšíření*. Potom, viz tabulka 1 na straně 7, můžeme psát

$$(\bar{x} - ku_c) \leq x_s \leq (\bar{x} + ku_c), \quad (33)$$

kde, za předpokladu, že rozdělení pravděpodobnosti je zhruba normální a  $u_c$  má mnoho stupňů volnosti pro  $k = 2$  leží skutečná hodnota měřené veličiny v intervalu (33) s pravděpodobností zhruba 95% a pro  $k = 3$  s pravděpodobností zhruba 99%.

Je však třeba mít na paměti, že rozšířená nejistota oproti nejistotě standardní nepřináší žádnou novou informaci, jedná se jen o jiný způsob vyjádření nejistoty měření. Při vyjadřování rozšířené nejistoty je nutné vždy uvádět, k jaké pravděpodobnosti je vztažena, respektive jaký koeficient rozšíření byl k jejímu určení použit.

### 3.4.3 Je to složitější ...

Určení intervalu spolehlivosti je ve skutečnosti poněkud komplikovanější, neboť podmínka, že *rozdělení pravděpodobnosti je zhruba normální a  $u_c$  má mnoho stupňů volnosti*, nemusí být vždy nutně splněna.

Jestliže je při opakovaném přímém měření fyzikální veličiny dominantní nejistota určena metodou typu A – výběrová směrodatná odchylka aritmetického průměru vypočtená vztahem (18) – je podle hypotézy o elementárních chybách rozdělení naměřených hodnot zhruba normální a pro počet stupňů volnosti standardní nejistoty platí  $\nu = N - 1$ . Dá se ukázat, viz dodatek A.1, že koeficient rozšíření ve vztahu (32) rozšiřující interval spolehlivosti (33) je rovný součiniteli  $t$  Studentova rozdělení pro požadovanou míru pravděpodobnosti, pro  $\nu \rightarrow \infty$  však Studentovo rozdělení přechází v rozdělení normální a koeficient rozšíření je možné vypočítat ze vztahu (15) nebo určit z tabulky 1. **Pro konečný počet stupňů volnosti s jeho klesající hodnotou velikost koeficientu rozšíření roste** (viz tabulka 6 na straně 33).

V případě nepřímých měření je situace obdobná. Jestliže jsou jednotlivé chyby vstupních veličin malé, můžeme výslednou chybu teoreticky vyjádřit pomocí Taylorova rozvoje (24). Výsledná chyba je tedy (až na multiplikatívni koeficienty) daná součtem chyb vstupních veličin, takže i v případě, kdy některé vstupní veličiny jsou zatíženy chybami s rozdělením jiným než normálním, má podle centrální limitní věty chyba výsledné veličiny zhruba normální rozdělení se směrodatnou odchylkou odhadnutou pomocí kombinované standardní nejistoty  $u_c$ . Počet stupňů volnosti  $\nu$  kombinované standardní nejistoty je možné vypočítat pomocí tzv. *Welchovy-Satterthwaitovy formule*, jejíž použití je podrobně diskutováno v [1], a koeficient rozšíření pomocí parametru  $t$  Studentova rozdělení pro daný počet stupňů volnosti, viz dodatek A.1.

## 4 Presentace výsledku měření

Výsledek měření, to jest hodnotu měřené fyzikální veličiny, prezentujeme s ohledem na skutečnost, že jej chceme někomu sdělit<sup>11</sup>. Z tohoto důvodu by měl být zapsán jednoznačně a srozumitelně.

### 4.1 Fyzikální veličiny a jejich jednotky

Hodnota skalární fyzikální veličiny je určena dvěma číselnými údaji. *Kvalita* veličiny je určena jednotkou, *kvantita* číselnou hodnotou. Jednotkou veličiny (měřicí jednotkou) je vhodně zvolená veličina stejného typu, která umožňuje kvantitativní porovnání veličin měřením a přisuzujeme jí hodnotu 1. Číselná hodnota je poměr veličiny vzhledem k její zvolené jednotce.

Mezi fyzikální veličinou, její číselnou hodnotou a jednotkou platí vztah

$$X = \{X\} [X],$$

kde  $\{X\}$  představuje číselnou hodnotu (v použitých jednotkách) a  $[X]$  příslušnou jednotku. Můžeme tedy například pro tzv. standardní tíhové zrychlení  $g_n$  psát

$$g_n = 9,806\ 65\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2},$$

Veličina	Jednotka	Symbol
délka	metr	m
čas	sekunda	s
hmotnost	kilogram	kg
elektrický proud	ampér	A
termodynamická teplota	kelvin	K
svítivost	kandela	cd
látkové množství	mol	mol

Tabulka 2: Základní jednotky SI.

kde  $\{g_n\} = 9,806\ 65$  je číselná hodnota a  $[g_n] = \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$  je jednotka, ke které se číselná hodnota vztahuje. Změnou jednotky se pro danou veličinu mění i příslušná číselná hodnota. Je tedy zřejmé, že pokud bychom zapomněli jednotku fyzikální veličiny zapsat, nebylo by zřejmé, k čemu se číselná hodnota vztahuje, a ta by sama o sobě neměla žádnou vypovídací hodnotu<sup>12</sup>.

Veličina	Jednotka	Symbol	Ekvivalent
kmitočet	hertz	Hz	$\text{s}^{-1}$
síla	newton	N	$\text{kg}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
práce	joule	J	$\text{N}\cdot\text{m} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$
výkon	watt	W	$\text{J}\cdot\text{s}^{-1} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}$
tlak	pascal	Pa	$\text{N}\cdot\text{m}^{-2} = \text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
elektrický náboj	coulomb	C	$\text{A}\cdot\text{s}$
elektrické napětí	volt	V	$\text{N}\cdot\text{C}^{-1}\cdot\text{m} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-1}$
elektrický odpor	ohm	$\Omega$	$\text{V}\cdot\text{A}^{-1} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-3}\cdot\text{A}^{-2}$
kapacita	farad	F	$\text{C}\cdot\text{V}^{-1} = \text{A}\cdot\text{s}^4\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$
magnetická indukce	tesla	T	$\text{N}\cdot\text{C}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s} = \text{kg}\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
magnetický indukční tok	weber	Wb	$\text{T}\cdot\text{m}^2 = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{A}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
indukčnost	henry	H	$\text{Wb}\cdot\text{A}^{-1} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{A}^{-2}\cdot\text{s}^{-2}$

Tabulka 3: Některé odvozené fyzikální veličiny a jejich jednotky.

<sup>11</sup>Což se, milí studenti, také týká protokolů z fyzikálního praktika!

<sup>12</sup>Sonda Mars Climate Orbiter shořela 23. 9. 1999 v atmosféře Marsu při neúspěšném pokusu o navedení na oběžnou dráhu. Příčinou byla skutečnost, že palubní řídicí program sondy očekával číselné hodnoty velikosti síly tahu motorů v metrických jednotkách (newtonech), zatímco program v pozemním řídicím středisku generoval tyto hodnoty v jednotkách britsko-amerických (pound force – lbf, 1 lbf = 4,448 222 N ).

Aby výsledky měření získané různými lidmi v různých místech a různých dobách mohly být porovnatelné, měří se fyzikální veličiny v jednotkách stanovených přesně a jednoznačně. Volba jednotek se provádí tak, že je udán experimentální postup<sup>13</sup>, jak se daná jednotka realizuje, nebo je za ni zvolen nějaký prototyp<sup>14</sup>.

Fyzikálních veličin je velké množství. Stejnorodé fyzikální veličiny můžeme sčítat a odčítat, násobením a dělením vznikají veličiny nové. Praxe ukázala, že k popsání všech fyzikálních jevů postačuje velmi malý soubor tzv. *základních veličin*, jejich násobením a dělením vznikají *veličiny odvozené*.

V roce 1960 vybrala XI. generální konference pro míry a váhy sedm základních veličin a jejich jednotek, které se staly základem *Mezinárodní soustavy jednotek* označované zkratkou SI, viz tabulka 2.

Soustava jednotek SI je rozšířena tzv. *jednotkami doplňkovými* – radián (rad) pro rovinný úhel a steradián (sr) pro úhel prostorový. Tyto jednotky se interpretují jako *bezrozměrové*<sup>15</sup>.

Některé odvozené veličiny a jejich jednotky, které mají vlastní název, jsou uvedeny v tabulce 3. Z praktických důvodů se používají i tzv. *vedlejší jednotky*, jako například minuta, den, světelný rok, úhlový stupeň, atp.

Násobek	Předpona	Značka	Násobek	Předpona	Značka
$10^{24}$	yotta-	Y	$10^{-24}$	yokto-	y
$10^{21}$	zetta-	Z	$10^{-21}$	zepto-	z
$10^{18}$	exa-	E	$10^{-18}$	atto-	a
$10^{15}$	peta-	P	$10^{-15}$	femto-	f
$10^{12}$	tera-	T	$10^{-12}$	<b>piko-</b>	<b>p</b>
$10^9$	<b>giga-</b>	<b>G</b>	$10^{-9}$	<b>nano-</b>	<b>n</b>
$10^6$	<b>mega-</b>	<b>M</b>	$10^{-6}$	<b>mikro-</b>	<b><math>\mu</math></b>
$10^3$	<b>kilo-</b>	<b>k</b>	$10^{-3}$	<b>mili-</b>	<b>m</b>
$10^2$	hekto-	h	$10^{-2}$	<b>centi-</b>	<b>c</b>
$10^1$	deka-	da	$10^{-1}$	deci-	d

Tabulka 4: Předpony používané u jednotek fyzikálních veličin.

Pro přehlednější číselného vyjádření hodnoty fyzikální veličiny se používají předpony jednotek, obvyklé je používání předpon podle třetí mocniny čísla 10. Používané předpony jsou uvedeny v tabulce 4, tučně jsou vyznačeny ty nejčastěji používané<sup>16</sup>.

Další detaily týkající se problematiky jednotek fyzikálních veličin lze nalézt v příslušné literatuře, například [11], [12].

## 4.2 Platné cifry

Při zápisu číselné hodnoty (nejen) fyzikální veličiny je třeba mít představu o tom, jak přesně danou hodnotu zapisujeme. Přesnost zapisovaného čísla vyjadřujeme pomocí tzv. *počtu platných cifer*.

<sup>13</sup>Například metr je definován jako vzdálenost, kterou světlo urazí za čas  $1/299\,792\,458$  sekundy.

<sup>14</sup>Například kilogram je hmotnost mezinárodního prototypu kilogramu (platino-iridiového válečku) uloženého v Mezinárodním úřadě pro míry a váhy v Sèvres ve Francii.

<sup>15</sup>Jednotkou bezrozměrové veličiny je číslo 1, při jejich vyjadřování se jednotka (1) neuvádí.

<sup>16</sup>Možná vás zarazily „násobící tečky“ v odvozených jednotkách v tabulce 3 a v celém tomto textu. I když jsou na první pohled zbytečné a nijak zvlášť estetické, mají svůj smysl. Kdybychom například napsali  $b = 0,002898 \text{ m K}$ , není zřejmé, zda máme na mysli „metry krát kelviny“, nebo „milikelviny“. Napíšeme-li však  $\text{m}\cdot\text{K}$ , je zřejmé, že máme na mysli „metry krát kelviny“ a že se jedná o konstantu Wienova zákona.

Počet platných cifer v čísle se určuje podle následujícího algoritmu.

1. **Nenulová číslice** nejvíce nalevo je nejvýznamnější platná cifra.
2. Jestliže číslo *neobsahuje* desetinnou čárku, **nenulová číslice** nejvíce napravo je nejméně významná platná cifra.
3. Jestliže číslo *obsahuje* desetinnou čárku, **čísllice (včetně nuly)** nejvíce napravo je nejméně významná platná cifra.
4. Počet platných cifer je počet číslic mezi nejvýznamnější a nejméně významnou včetně.

**Příklad.** Následující čísla jsou zapsána s přesností na tři platné cifry: 123, 10 300, 1,02, 1,00, 0,123, 0,0101, 0,0100. Číslo 100 000 je s přesností na tři platné cifry možné zapsat jako  $1,00 \cdot 10^5$ .

V případě číselných hodnot veličin získaných měření a následným výpočtem nemá smysl uvádět výsledné hodnoty s přesností danou strojovou přesností počítače či rozlišením displeje kalkulačky, neboť vstupní data jsou zatížena chybami, což je kvantifikováno jejich nejistotou. Přesnost těchto číselných hodnot na požadovaný počet platných cifer, viz níže, snižujeme zaokrouhlováním<sup>17</sup>.

### 4.3 Zápis výsledku měření

Hodnotu fyzikální veličiny získanou měřením vždy prezentujeme spolu s vypočtenou nejistotou, čímž vyjadřujeme, jak „přesně“ tato veličina byla určena. Výsledek měření veličiny  $x$  zpravidla zapisujeme ve tvaru

$$x = (\bar{x} \pm u_c) [x], \quad (34)$$

kde  $\bar{x}$  je nejlepší odhad skutečné hodnoty měřené veličiny (často realizovaný pomocí aritmetického průměru),  $u_c$  je kombinovaná standardní nejistota tohoto odhadu a  $[x]$  je jednotka, ve které je číselná hodnota odhadu měřené veličiny a její nejistoty udávána. Závorka vyjadřuje, že obě číselné hodnoty se vztahují k téže jednotce.

Jak bylo výše uvedeno, viz vztah (19), nejistota měření má poměrně velkou nejistotu a z tohoto důvodu ji vyjadřujeme *s přesností na maximálně dvě platné cifry*. Počet platných cifer u odhadu měřené veličiny upravíme tak, aby obě čísla byla zapsána se stejnou přesností.

K vyjádření přesnosti měření se často ve vztahu (34) používá i rozšířená nejistota. Z tohoto důvodu je třeba vždy výslovně uvést, co číselná hodnota za symbolem  $\pm$  reprezentuje a v případě rozšířené nejistoty, k jakému intervalu spolehlivosti se vztahuje.

---

<sup>17</sup>Na číslice následující za nejméně významnou platnou cifrou (NVPC) nahlížíme, jako by před nimi byla desetinná čárka a tvoří tak číslo  $z$  menší než 1. Pokud  $z < 1/2$ , číslice za NVPC vypustíme. Pokud  $z > 1/2$ , číslice za NVPC vypustíme a NVPC zvýšíme o 1. Pokud  $z = 1/2$  číslice za NVPC vypustíme a NVPC zvýšíme o 1, pokud je lichá. Tímto se vyhneme zanesení systematické chyby při případném dalším zpracování (sčítání) takto zaokrouhlených čísel.

**Příklad zápisu výsledku měření:** Ve fyzikálním praktiku byla měřením a následným výpočtem na počítači nalezena tato hodnota Planckovy konstanty a její standardní nejistoty:

$$h = 6,615\,275\,932 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}, \quad u(h) = 2,776\,069\,419 \cdot 10^{-36} \text{ J}\cdot\text{s}.$$

Standardní nejistotu zapíšeme s přesností na dvě platné cifry

$$u(h) = 2,8 \cdot 10^{-36} \text{ J}\cdot\text{s} = 0,028 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$$

a Planckovu konstantu zaokrouhlíme na stejný počet desetinných míst, jako nejistotu

$$h = 6,615 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$

Výsledek měření zapíšeme takto: Měřením bylo zjištěno, že pro Planckovu konstantu platí

$$h = (6,615 \pm 0,028) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s},$$

kde číslo uvedené za symbolem  $\pm$  vyjadřuje kombinovanou standardní nejistotu.

Další příklady zápisu výsledku měření lze nalézt v dodatku A.2.

## 5 Příklad

### Objem pingpongového míčku

Máme za úkol zjistit objem  $V$  pingpongového míčku. Použijeme vztah

$$V = \frac{1}{6}\pi d^3,$$

kde  $d$  je průměr, jenž budeme měřit posuvným měřítkem, které svým noniem dělí milimetr na 50 dílků. Předem jsme si ověřili, že míček je natolik tuhý, že přiložením posuvného měřítka jej nedeformujeme natolik, abychom se dopouštěli systematické chyby, kterou bychom museli korigovat. Opakovaným měřením byly zjištěny níže uvedené hodnoty.

Měření č.	1	2	3	4	5	6	7	8
Průměr $d_i$ [mm]	37,74	37,76	37,78	37,72	37,78	37,76	37,74	37,76

Vypočteme aritmetický průměr průměru míčku

$$\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 d_i = 37,755 \text{ mm}.$$

Vypočteme odhad směrodatné odchylky naměřených hodnot

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (d_i - \bar{d})^2}{N - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 (d_i - 37,755)^2}{7}} = 0,0207 \text{ mm}.$$

Standardní nejistotu aritmetického průměru (vyhodnocenou metodou typu A) pak vypočteme pomocí vzorce

$$u_A(\bar{d}) = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{0,0207 \text{ mm}}{\sqrt{8}} = 0,00732 \text{ mm}.$$

Posuvné měřítko má konečné rozlišení související s jemností dělení stupnice  $\Delta = 0,02 \text{ mm}$ . S tím je spojena standardní nejistota (určená metodou typu B), pro kterou můžeme psát

$$u_B(\bar{d}) = \frac{0,02 \text{ mm}}{\sqrt{12}} = 0,00577 \text{ mm}.$$

Kombinovanou standardní nejistotu průměru míčku vypočteme pomocí vzorce (30) jako

$$u_C(\bar{d}) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0,00932 \text{ mm}.$$

Nejlepší odhad objemu míčku vypočteme jako

$$V = \frac{1}{6}\pi\bar{d}^3 = \frac{1}{6}\pi(37,755 \text{ mm})^3 = 28\,178,7709 \text{ mm}^3.$$

Pro standardní kombinovanou nejistotu objemu míčku pak dostaneme

$$u(V) = \left| \frac{\partial V}{\partial d} \right| u_C(\bar{d}) = \frac{1}{2}\pi\bar{d}^2 u_C(\bar{d}) = 20,87 \text{ mm}^3 \approx 21 \text{ mm}^3.$$

Pro objem míčku tedy můžeme psát

$$V = (28\,179 \pm 21) \text{ mm}^3,$$

kde číslo uvedené za symbolem  $\pm$  vyjadřuje kombinovanou standardní nejistotu.

## 6 Metoda nejmenších čtverců

Velmi často je třeba experimentálně zjistit parametry funkční závislosti dvou veličin  $X$  a  $Y$ . Tato funkční závislost buď může vycházet z příslušné *teorie*, nebo ji hledáme a snažíme se vytvořit *model*, pomocí kterého bychom závislost veličin  $X$  a  $Y$  nějak popsali.

Tato úloha se řeší tak, že pro  $N$  různých hodnot  $x_i$  se měří odpovídající hodnoty  $y_i$  a parametry příslušné funkční závislosti se odhadnou pomocí tzv. *metody nejmenších čtverců*, jejíž elementární příklad je uveden v poznámce na straně 4.

V dalším textu jsou uvedeny algoritmy metody nejmenších čtverců pro aproximaci experimentálních dat lineární, exponenciální a polynomiální funkční závislostí, respektive odhad příslušných regresních parametrů a jejich standardních nejistot (směrodatných odchylek). Složitější případy, vedoucí zpravidla na numerické řešení soustav nelineárních algebraických rovnic je možné nalézt například v [3], [6].

## 6.1 Aproximace přímkou

Předpokládejme nejdříve, že hodnota veličiny  $Y$  je lineárně závislá na hodnotě veličiny  $X$  a že tedy teoreticky platí

$$y_0(x) = a_0 + b_0x, \quad (35)$$

kde  $b_0 \neq 0$ . V  $i$ -tém měření získáme hodnoty  $(x_i, y_i)$ . Předpokládejme, že hodnotu  $x_i$  umíme zjistit (nastavit) *přesně*, zatímco hodnota  $y_i = y_0(x_i) + \epsilon_i$  je zatížena náhodnou chybou  $\epsilon_i$ , jejíž statistické rozdělení je normální (Gaussovo) a má směrodatnou odchylku  $\sigma_i$ . Pro pravděpodobnost, že naměřená hodnota bude ležet v (úzkém) intervalu  $y_0(x_i) \pm \Delta y/2$ , tedy bude platit

$$P_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{y_i - y_0(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\} \Delta y. \quad (36)$$

Pravděpodobnost, že  $N$  hodnot  $y_i$  bude ležet v příslušném intervalu, vypočteme jako součin jednotlivých pravděpodobností (36), tedy

$$\begin{aligned} P(a_0, b_0) &= \prod_{i=1}^N P_i = \prod_{i=1}^N \frac{(\Delta y)^N}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{y_i - y_0(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{(\Delta y)^N}{\sqrt{2\pi}} \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k} \times \prod_{i=1}^N \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{y_i - y_0(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{(\Delta y)^N}{\sqrt{2\pi}} \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - y_0(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (37)$$

Podívejme se nyní na situaci z odlišného úhlu pohledu. Měřením jsme získali  $N$  dvojic  $(x_i, y_i)$  a chceme odhadnout parametry *skutečné* funkční závislosti (35), ve tvaru

$$y(x) = a + bx. \quad (38)$$

Pro pravděpodobnost, že naměřené hodnoty budou ležet v intervalech  $y(x_i) \pm \Delta y/2$  podobně jako ve vztahu (37), dostaneme

$$P(a, b) = \frac{(\Delta y)^N}{\sqrt{2\pi}} \prod_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 \right\}. \quad (39)$$

Parametry  $a$  a  $b$  určíme tak, aby pravděpodobnost  $P(a, b)$  byla maximální, tedy nalezením extrému funkce (39). Jelikož členy před exponenciálou jsou konstantní a exponenciála je monotónní funkce, stačí hledat extrém funkce<sup>18</sup>

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i} \right)^2. \quad (40)$$

Vypočteme derivace podle parametrů  $a$  a  $b$  a výsledek položíme rovný nule, tedy

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i} \right)^2 = -2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i (y_i - ax_i - b)}{\sigma_i^2} \stackrel{!}{=} 0, \quad (41a)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i} \right)^2 = -2 \sum_{i=1}^N \frac{y_i - ax_i - b}{\sigma_i^2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (41b)$$

---

<sup>18</sup> $\chi^2$  – čti *chí kvadrát*.

Vztahy (41) můžeme přepsat do tvaru

$$a \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} + b \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}, \quad (42a)$$

$$a \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} + b \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}, \quad (42b)$$

což je soustava dvou lineárních algebraických rovnic pro neznámé parametry  $a$  a  $b$ . Soustavu snadno vyřešíme Cramerovým pravidlem

$$a = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{y_k}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_k y_k}{\sigma_k^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{k=1}^N \frac{x_k y_k}{\sigma_k^2} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{k=1}^N \frac{y_k}{\sigma_k^2} \right), \quad (43a)$$

$$b = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \sum \frac{y_k}{\sigma_k^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_k y_k}{\sigma_k^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta} \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \sum_{k=1}^N \frac{y_k}{\sigma_k^2} - \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \sum_{k=1}^N \frac{x_k y_k}{\sigma_k^2} \right), \quad (43b)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_k}{\sigma_k^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \sum_{k=1}^N \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} - \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2.$$

Budou-li mít všechny směrodatné odchylky stejnou hodnotu  $\sigma_i = \sigma$ , přejdou vzorce (43) do jednoduššího tvaru

$$a = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_k}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_k - \sum x_i \sum x_k y_k}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (44)$$

Dále určíme standardní nejistoty (směrodatné odchylky) regresních parametrů  $a$  a  $b$ . K jejich nejistotám přispívají nejistoty jednotlivých hodnot  $y_i$ . Použitím vzorce (28) tedy můžeme psát

$$\sigma_a^2 = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial a}{\partial y_k} \right)^2 \sigma_k^2, \quad \sigma_b^2 = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial b}{\partial y_k} \right)^2 \sigma_k^2. \quad (45)$$

Derivováním vzorců (43) postupně dostaneme

$$\frac{\partial a}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_k^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right), \quad \frac{\partial b}{\partial y_k} = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{1}{\sigma_k^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right),$$



takže po dosazení do vztahů (45) můžeme psát

$$\begin{aligned}
\sigma_a^2 &= \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_k^2}{\Delta^2} \left( \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_k^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 = \\
&= \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_k^2}{\Delta^2} \left[ \frac{x_k^2}{\sigma_k^4} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^2 - \frac{2x_k}{\sigma_k^4} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \frac{1}{\sigma_k^4} \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \left[ \sum_{k=1}^N \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k^2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \left[ \sum_{k=1}^N \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^2 - \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left( \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{\sigma_k^2} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right) \left[ \sum_{k=1}^N \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sigma_j^2} - \left( \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{\sigma_k^2} \right)^2 \right] = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (46)
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}
\sigma_b^2 &= \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_k^2}{\Delta^2} \left( \frac{1}{\sigma_k^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 = \\
&= \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_k^2}{\Delta^2} \left[ \frac{1}{\sigma_k^4} \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right)^2 - \frac{2x_k}{\sigma_k^4} \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \left[ \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k^2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right)^2 - 2 \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{\sigma_k^2} \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} + \sum_{k=1}^N \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left( \sum_{k=1}^N \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \right)^2 - \sum_{k=1}^N \frac{x_k^2}{\sigma_k^2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2 \right] = \\
&= \frac{1}{\Delta^2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \right) \left[ \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k^2} \sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{\sigma_j^2} - \left( \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{\sigma_k^2} \right)^2 \right] = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}. \quad (47)
\end{aligned}$$

Ve speciálním případě, kdy  $\sigma_i = \sigma$ , přejdou vzorce (46) a (47) do jednoduššího tvaru

$$\sigma_a^2 = \frac{N\sigma^2}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad \sigma_b^2 = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}. \quad (48)$$

## 6.2 Aproximace známou mocninou

Často se setkáváme se situací, kdy teoretická funkční závislost má tvar

$$y_0 = c_0 x^m, \quad (49)$$

kde  $m$  je známá<sup>19</sup> mocnina. Ve speciálním případě, kdy  $m = 1$ , se jedná o přímku procházející počátkem, můžeme použít postup uvedený v předchozím odstavci (určujeme o jeden parametr navíc ( $a$ ), přicházíme o jeden stupeň volnosti a používáme složitější vzorce, ale na druhou stranu, můžeme tímto způsobem vykompenzovat aditivní systematickou chybu).

Odhad  $c$  regresního parametru  $c_0$  najdeme pomocí extrému funkce

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - cx_i^m}{\sigma_i} \right)^2.$$

Derivováním dostaneme

$$\frac{d\chi^2}{dc} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i^m y_i - cx_i^{2m}}{\sigma_i^2}. \quad (50)$$

V extrému je funkce (50) rovna nule, takže dostaneme

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i^m y_i - cx_i^{2m}}{\sigma_i^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\sum x_i^m y_i / \sigma_i^2}{\sum x_i^{2m} / \sigma_i^2}. \quad (51)$$

Tento vztah se pro případ, kdy jsou všechny směrodatné odchylky stejné ( $\sigma_i = \sigma$ ), dále zjednodušuje do tvaru

$$c = \frac{\sum x_i^m y_i}{\sum x_i^{2m}}. \quad (52)$$

Směrodatnou odchylku  $\sigma_c$  najdeme použitím vzorce (28) aplikovaného na vztah (51) jako

$$\sigma_c^2 = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial c}{\partial y_k} \right)^2 \sigma_k^2 = \sum_{k=1}^N \left( \frac{x_k^m / \sigma_k^2}{\sum_i x_i^{2m} / \sigma_i^2} \right)^2 \sigma_k^2 = \frac{\sum_k x_k^{2m} / \sigma_k^2}{\left( \sum_i x_i^{2m} / \sigma_i^2 \right)^2} = \frac{1}{\sum x_i^{2m} / \sigma_i^2}. \quad (53)$$

V případě, kdy jsou všechny směrodatné odchylky stejné ( $\sigma_i = \sigma$ ), přechází vzorec (53) do jednoduššího tvaru

$$\sigma_c^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^{2m}}. \quad (54)$$

### 6.3 Aproximace exponenciálou

Vzorce odvozené v předchozím textu lze přímočaře aplikovat i na případ, kdy teoretická závislost veličin  $X$  a  $Z$  je exponenciální a platí

$$z_0(x) = A_0 e^{k_0 x}. \quad (55)$$

Tuto exponenciální závislost lze logaritmováním převést na závislost lineární

$$\ln z_0(x) = \ln (A_0 e^{k_0 x}) = k_0 x + \ln A_0.$$

Odhady regresních parametrů tedy můžeme hledat pomocí extrému funkce

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\ln z_i - kx_i - \ln A}{\sigma'_i} \right]^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - ax_i - b}{\sigma'_i} \right]^2, \quad (56)$$

<sup>19</sup>Užitečné by jistě bylo, kdybychom nepředpokládali, že mocninu  $m$  známe, ale metodou nejmenších čtverců našli její odhad. Tato úloha ale vede na soustavu nelineárních rovnic, které je třeba řešit numericky na počítači. Blíže viz odstavec 6.5.

kde jsme položili

$$y_i = \ln z_i, \quad a = k, \quad b = \ln A.$$

Směrodatné odchyly  $\sigma'_i$  odpovídají veličině  $\ln z_i$  a s použitím vzorce (28) pro ně můžeme psát

$$\sigma_i'^2 = \left( \frac{dy}{dz} \right)_{z=z_i}^2 \sigma_i^2 = \left[ \frac{d(\ln z)}{dz} \right]_{z=z_i}^2 \sigma_i^2 = \frac{\sigma_i^2}{z_i^2}.$$

Po té, co pomocí vzorců (43) (46) a (47) vypočteme parametry  $a$  a  $b$  a jejich směrodatné odchyly, provedeme zpětnou transformaci

$$k = a, \quad A = e^b$$

a přepočítáme směrodatné odchyly pro parametry  $A$  a  $k$  jako

$$\sigma_k^2 = \sigma_a^2, \quad \sigma_A^2 = \left( \frac{dA}{db} \right)^2 \sigma_b^2 = \left[ \frac{d(e^b)}{db} \right]^2 \sigma_b^2 = e^{2b} \sigma_b^2.$$

## 6.4 Aproximace polynomem $m$ -tého stupně

Složitější funkční závislosti se často aproximují pomocí polynomů, čehož se využívá i v případě experimentálně získaných dat. Koeficienty polynomu

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{m-1}x^{m-1} + a_mx^m = \sum_{j=0}^m a_jx^j$$

aproximujícího  $N$  naměřených dvojic  $(x_i, y_i)$ , pro něž platí stejné předpoklady jako v odstavci 6.1, můžeme odhadnout z extrému funkce

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left( y_i - \sum_{j=0}^m a_jx_i^j \right)^2.$$

Nejdříve vypočteme derivace podle jednotlivých koeficientů a výsledky položíme rovné nule, tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^2}{\partial a_0} &= -2 \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \left( y_i - \sum_{j=0}^m a_jx_i^j \right) \stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial a_1} &= -2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{\sigma_i^2} \left( y_i - \sum_{j=0}^m a_jx_i^j \right) \stackrel{!}{=} 0, \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial a_2} &= -2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \left( y_i - \sum_{j=0}^m a_jx_i^j \right) \stackrel{!}{=} 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial a_m} &= -2 \sum_{i=1}^N \frac{x_i^m}{\sigma_i^2} \left( y_i - \sum_{j=0}^m a_jx_i^j \right) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Tím dostaneme soustavu  $m+1$  lineárních rovnic pro  $m+1$  hledaných koeficientů  $a_m$ , kterou můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m a_j \sum_{i=1}^N \frac{x_i^j}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{\sigma_i^2}, \\ \sum_{j=0}^m a_j \sum_{i=1}^N \frac{x_i^{j+1}}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}, \\ \sum_{j=0}^m a_j \sum_{i=1}^N \frac{x_i^{j+2}}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 y_i}{\sigma_i^2}, \\ &\vdots \\ \sum_{j=0}^m a_j \sum_{i=1}^N \frac{x_i^{j+m}}{\sigma_i^2} &= \sum_{i=1}^N \frac{x_i^m y_i}{\sigma_i^2}, \end{aligned}$$

anebo maticově jako

$$\begin{bmatrix} \sum \frac{1}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \cdots & \sum \frac{x_i^m}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \cdots & \sum \frac{x_i^{m+1}}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^3}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^4}{\sigma_i^2} & \cdots & \sum \frac{x_i^{m+2}}{\sigma_i^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \frac{x_i^m}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^{m+1}}{\sigma_i^2} & \sum \frac{x_i^{m+2}}{\sigma_i^2} & \cdots & \sum \frac{x_i^{2m}}{\sigma_i^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \\ \sum \frac{x_i^2 y_i}{\sigma_i^2} \\ \vdots \\ \sum \frac{x_i^m y_i}{\sigma_i^2} \end{bmatrix}.$$

Tuto maticovou rovnici můžeme přepsat do poněkud úspornějšího tvaru

$$\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (58)$$

kde

$$M_{kl} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^{k+l}}{\sigma_i^2}, \quad b_k = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^k y_i}{\sigma_i^2}, \quad k, l = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Řešení soustavy (58) nalezneme snadno pomocí inverzní matice k  $\mathbf{M}$  jako

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{E} \mathbf{a} = \mathbf{a} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{R} \mathbf{b}, \quad (59)$$

kde  $\mathbf{R} = \mathbf{M}^{-1}$  a  $\mathbf{E}$  je jednotková matice.

Standardní nejistoty regresních parametrů (směrodatné odchylky) opět vypočteme ze vzorce pro kombinovanou nejistotu (28) ve tvaru

$$\sigma_{a_k}^2 = \sum_{l=1}^N \left( \frac{\partial a_k}{\partial y_l} \right)^2 \sigma_l^2. \quad (60)$$

Protože platí

$$a_k = \sum_{j=0}^m R_{kj} b_j = \sum_{j=0}^m R_{kj} \sum_{i=1}^N \frac{x_i^j y_i}{\sigma_i^2},$$

můžeme psát

$$\frac{\partial a_k}{\partial y_l} = \sum_{j=0}^m R_{kj} \frac{x_l^j}{\sigma_l^2} \quad (61)$$

a dosazením výrazu (61) do vztahu (60) postupně dostaneme

$$\begin{aligned} \sigma_{a_k}^2 &= \sum_{l=1}^N \left( \sum_{j=0}^m R_{kj} \frac{x_l^j}{\sigma_l^2} \right)^2 \sigma_l^2 = \sum_{l=1}^N \left( \sum_{i=0}^m R_{ki} \frac{x_l^i}{\sigma_l^2} \right) \left( \sum_{j=0}^m R_{kj} \frac{x_l^j}{\sigma_l^2} \right) \sigma_l^2 = \\ &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m R_{ki} R_{kj} \sum_{l=1}^N \frac{x_l^{i+j}}{\sigma_l^2} = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m R_{ki} R_{kj} M_{ij} = \\ &= \sum_{j=0}^m R_{kj} \sum_{i=0}^m R_{ki} M_{ij} = \sum_{j=0}^m R_{kj} E_{kj} = R_{kk}, \quad (62) \end{aligned}$$

kde jsme využili vlastnosti jednotkové matice  $E_{kj} = 0$  pro  $k \neq j$  a  $E_{kj} = 1$  pro  $k = j$ .

Vzorec (62) tedy říká, že rozptýl koeficientu  $a_k$  je roven  $k$ -tému prvku diagonály matice inverzní k matici  $\mathbf{M}$ .

## 6.5 Složitější případy

Problémy řešené v odstavcích 6.1 – 6.4 bylo možné (i když někdy trochu pracně) řešit analyticky. Metody popsané v odstavci 6.4 lze přímočaře zobecnit na případ

$$y(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) \cdots + a_m f_m(x) = \sum_{j=1}^m a_j f_j(x),$$

tedy pro funkce lineární vzhledem k hledaným parametrům, viz [3]. Funkce, jež nejsou lineární vzhledem ke hledaným parametrům, zpravidla vedou na soustavy nelineárních rovnic, které je třeba řešit metodami numerické matematiky, viz [3], [6]. Výjimkou jsou ovšem případy, kdy se dá nelineární problém vhodnou transformací převést na jednodušší případ, viz odstavec 6.3.

V předchozích odstavcích jsme uvažovali, že hodnoty  $x_i$  nezávislé veličiny jsou určeny tak přesně, že jejich nejistoty nemusíme vůbec uvažovat, což někdy (spíš často) nemusí být splněno. V případě, kdy je výrazně přesnější určení veličiny závislé oproti veličině nezávislé je možné u aproximace přímkou vyjít z inverzní relace

$$x(y) = a' + b'y,$$

použít metody popsané v odstavci 6.1 a pak vyjádřit  $a = -a'/b'$  a  $b = 1/b'$ .

Obecný případ, kdy je třeba uvažovat nejistoty jak závislé tak i nezávislé veličiny, opět vede na nelineární soustavy rovnic, které se řeší numericky, detaily viz [3], [6].

## 6.6 Posouzení kvality aproximace

Metoda nejmenších čtverců je založena na hypotéze, že optimální aproximace hodnot  $x_i, y_i$  funkcí  $y(x)$  je ta, která minimalizuje výraz

$$\chi^2 \equiv \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2.$$

Odhad rozptylu dat kolem funkční závislosti  $y(x)$ , jejíž parametry byly metodou nejmenších čtverců nalezeny, je možné definovat vztahem podobným vztahu (6) jako

$$s^2 \equiv \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2, \quad (63)$$

kde  $\nu = N - M$  je počet stupňů volnosti, tedy počet naměřených hodnot zmenšený o počet parametrů určovaných metodou nejmenších čtverců (takže například pro aproximaci přímkou  $M = 2$ , pro aproximaci polynomem  $m$ -tého stupně  $M = m + 1$ ).

Velikost rozptylu  $s^2$  je jednak závislá na rozptylu  $\sigma_i^2$  naměřených hodnot kolem hodnot skutečných  $y_0(x_i)$  (souvisí s velikostmi chyb měření) a jednak na tom, jak dobře funkce  $y(x)$  aproximuje teoretickou (skutečnou) závislost  $y_0(x)$ .

Pro častý případ, kdy  $\sigma_i = \sigma$ , můžeme psát

$$\chi_\nu^2 \equiv \frac{\chi^2}{\nu} = \frac{\sum_{i=1}^N [y_i - y(x_i)]^2}{\nu \sigma^2} = \frac{s^2}{\sigma^2}. \quad (64)$$

Pro hodnotu výrazu  $\chi_\nu^2$  by v případě „dobré aproximace“ zřejmě mělo platit  $\chi_\nu^2 \approx 1$ .

Jako empirické kritérium pro posouzení, zda funkce  $y(x)$  dobře aproximuje naměřená data i v případě, kdy  $\sigma_i$  jsou různé, můžeme tedy použít vztah

$$\chi_\nu^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2, \quad (65)$$

jehož hodnota by se neměla příliš lišit od jedné. Velmi malé hodnoty  $\chi_\nu^2$  většinou svědčí o „přecenění“ chyb měření (příliš velkém odhadu hodnot  $\sigma_i$ ), příliš velké hodnoty signalizují špatnou aproximaci.

Pravděpodobnostní přístup posouzení kvality aproximace lze nalézt například v [3].

## 6.7 Když neznáme nejistoty vstupních dat ...

V předchozích odstavcích věnovaných metodě nejmenších čtverců jsme předpokládali, že známe směrodatné odchylky (nebo spíš jejich odhady)  $\sigma_i$  závislé veličiny  $y_i$ . Pomocí nich jsme pak schopni vypočítat směrodatné odchylky regresních parametrů a posoudit kvalitu aproximace. Někdy se však můžeme dostat do situace, kdy nejistoty vstupních dat buď neznáme, nebo o nich máme špatné informace<sup>20</sup>.

V těchto případech je možné postupovat tak, že do vzorců pro výpočet regresních parametrů dosadíme  $\sigma_i = \sigma = 1$  a vypočteme regresní parametry, čímž určíme funkční závislost  $y(x)$ . Odhad rozptylu vstupních dat  $s^2$  kolem funkční závislosti  $y(x)$  poté vypočteme pomocí vzorce (63), přičemž bude zřejmě platit  $s^2 = \chi^2/\nu = \chi_\nu^2$ .

Dále budeme předpokládat (což ale nemusí být pravda), že funkční závislost  $y(x)$  je zvolena správně. V tom případě by mělo platit  $\sigma^2 \approx s^2$ . Hodnotu  $s^2$  vypočtenou vzorcem (63) tedy použijeme jako odhad rozptylu hodnot  $y_i$  ve vzorcích pro výpočet nejistot regresních parametrů.

<sup>20</sup>To se může například projevit tím, že dosazením do vzorce (65) dostaneme  $\chi_\nu^2 \ll 1$ .

## 6.8 Poznámka – vážený průměr

V některých případech opakujeme stejný experiment (měření veličiny  $X$ ) vícekrát ( $N$ -krát). Při každém opakování experimentu, ať už jakýmkoliv způsobem, určíme nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny (označme ji  $\bar{x}_i$ ) a odhad její směrodatné odchylky (standardní nejistotu)  $\bar{s}_i$ . Díky chybám měření při každém opakování experimentu dostaneme jiné hodnoty ( $\bar{x}_i, \bar{s}_i$ ), případně, použijeme-li jiné metody či přístroje, můžeme v některých následných opakováních měření zpřesnit (zmenšit standardní nejistotu).

Budeme-li předpokládat, že výsledky jednotlivých opakování experimentu nejsou zatížené systematickými chybami, můžeme nejpravděpodobnější hodnotu  $\mu$  měřené veličiny  $X$  s využitím všech získaných výsledků najít minimalizací funkce

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\bar{x}_i - \mu}{\bar{s}_i} \right)^2.$$

Dostaneme tak

$$\frac{d\chi^2}{d\mu} = -2 \sum_{i=1}^N \frac{\bar{x}_i - \mu}{\bar{s}_i^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\sum_i \bar{x}_i / \bar{s}_i^2}{\sum_i 1 / \bar{s}_i^2}, \quad (66)$$

což je vážený průměr, který zajišťuje, že přesněji změřené hodnoty se počítají s větší vahou. V případě, že všechny hodnoty  $\bar{s}_i$  jsou stejné přechází vzorec (66) v obyčejný aritmetický průměr (všechny hodnoty se počítají se stejnou vahou).

Standardní nejistotu  $\sigma_\mu$  váženého průměru opět odhadneme pomocí vzorce (28) jako

$$\sigma_\mu^2 = \sum_{k=1}^N \left( \frac{\partial \mu}{\partial \bar{x}_k} \right)^2 \bar{s}_k^2 = \sum_{k=1}^N \left( \frac{1/\bar{s}_k^2}{\sum_i 1/\bar{s}_i^2} \right)^2 \bar{s}_k^2 = \frac{1}{\sum_i 1/\bar{s}_i^2}. \quad (67)$$

## 7 Další metody

### 7.1 Metoda postupných měření

Metoda postupných měření, neboli postupná metoda, se týká souboru takových měření, která na sebe těsně navazují a vyznačují se tím, že koncový bod jednoho měření je zároveň výchozím bodem měření následujícího. Je vhodná zejména pro měření periody pravidelně se opakujících dějů a pro určování odlehlosti bodů tvořících pravidelnou řadu.

Provedením  $N$  měření dostaneme hodnoty  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ , které by bez přítomnosti chyb měření tvořily aritmetickou posloupnost a platilo by

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_N - x_{N-1} = \Delta x.$$

Jelikož jsou měření zatížena chybami, jednotlivé přírůstky  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  mají odlišné hodnoty. Zdálo by se tedy logické, že nejlepší odhad přírůstku  $\Delta x$  dostaneme jako aritmetický průměr jednotlivých přírůstků

$$\overline{\Delta x} = \frac{1}{N-1} \left[ (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_{N-2} - x_{N-1}) + (x_N - x_{N-1}) \right] = \frac{x_N - x_1}{N-1},$$

ale protože všechny hodnoty mezi  $x_N$  a  $x_1$  se vzájemně odečtou, nepřispívají ke zpřesnění měření, respektive ke snížení jeho nejistoty.

Z toho důvodu postupujeme následujícím způsobem. Soubor naměřených hodnot rozdělíme na dvě stejně početné skupiny (pokliže je  $N$  liché, jednu, zpravidla první, naměřenou hodnotu vyřadíme) čítající  $k = N/2$  po sobě následujících prvků, viz tabulka 5. Jednotlivé rozdíly  $x_{k+i} - x_i$  reprezentují  $k$ -násobek příslušného přírůstku, takže můžeme psát

$x_1$	$x_{k+1}$	$x_{k+1} - x_1$
$x_2$	$x_{k+2}$	$x_{k+2} - x_2$
$x_1$	$x_{k+1}$	$x_{k+1} - x_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{k-2}$	$x_{N-2}$	$x_{N-2} - x_{k-2}$
$x_{k-1}$	$x_{N-1}$	$x_{N-1} - x_{k-1}$
$x_k$	$x_N$	$x_N - x_k$

Tabulka 5: K postupné metodě.

$$\begin{aligned}\overline{\Delta x} &= \frac{1}{k} \left( \frac{x_{k+1} - x_1}{k} + \frac{x_{k+2} - x_2}{k} + \dots + \frac{x_N - x_k}{k} \right) = \\ &= \frac{1}{k^2} \left( \sum_{i=k+1}^N x_i - \sum_{i=1}^k x_i \right) = \frac{4}{N^2} \left( \sum_{i=N/2+1}^N x_i - \sum_{i=1}^{N/2} x_i \right). \quad (68)\end{aligned}$$

Pro odhad rozptylu přírůstků  $\Delta x_i$  můžeme psát

$$\begin{aligned}s^2 &= \frac{[(x_{k+1} - x_1)/k - \overline{\Delta x}]^2 + [(x_{k+2} - x_2)/k - \overline{\Delta x}]^2 + \dots + [(x_N - x_k)/k - \overline{\Delta x}]^2}{k - 1} = \\ &= \frac{1}{k^2(k - 1)} \sum_{i=1}^k (x_{k+i} - x_i - k\overline{\Delta x})^2 = \frac{8}{N^2(N - 2)} \sum_{i=1}^{N/2} \left( x_{N/2+i} - x_i - \frac{N}{2}\overline{\Delta x} \right)^2,\end{aligned}$$

takže pro odhad směrodatné odchylky aritmetického průměru přírůstků bude platit

$$\overline{s} = \frac{s}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{16}{N^3(N - 2)} \sum_{i=1}^{N/2} \left( x_{N/2+i} - x_i - \frac{N}{2}\overline{\Delta x} \right)^2}. \quad (69)$$

Poznamenejme, že takovéto soubory naměřených hodnot můžeme stejně dobře zpracovat metodou nejmenších čtverců tak, že naměřené hodnoty, jejichž pořadová čísla zvolíme za nezávislou veličinu, necháme proložit polynomem 1. stupně. Koefficient u lineárního členu pak odpovídá odhadu přírůstku  $\Delta x$ .

## 7.2 Metoda redukce

Metoda redukce je velice jednoduchý způsob zpracování nepřímých měření. Nechť veličina  $Y$  je nepřímo určována měřením veličin  $X_1, X_2, \dots, X_M$  a platí

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_M).$$

Provedeme celkem  $N$ -krát (*současně a za stejných podmínek*) měření těchto  $M$  veličin. V  $k$ -tém měření naměříme hodnoty  $x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{M,k}$ , ze kterých vypočteme hodnotu

$$y_k = f(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{M,k}).$$

Nejllepší odhad skutečné hodnoty veličiny  $Y$  pak vypočteme jako aritmetický průměr

$$\overline{y} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k$$



a standardní nejistotu aritmetického průměru jako

$$u(\bar{y}) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (y_k - \bar{y})^2}{N(N-1)}}.$$

Výhoda této metody spočívá v jednoduchosti určení nejistoty nepřímo měřené veličiny. Je výhodná zejména v případech, kdy některé vstupní veličiny jsou závislé a při výpočtu kombinované standardní nejistoty (vzorec (28)) by bylo třeba uvažovat i příslušné kovariance.

# A Dodatek

## A.1 Studentovo rozdělení

Předpokládejme, že měřená veličina je reprezentována náhodnou veličinou s normálním rozdělením, střední (skutečnou) hodnotou  $x_s$  a rozptylem  $\sigma_X^2$ , které neznáme. Pro hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny platí

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-x_s)^2}{2\sigma_X^2}}.$$

Soubor  $N$  hodnot  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$  získaných skutečně provedeným měřením je náhodným výběrem ze všech možných hodnot měřené veličiny.

Odhad skutečné hodnoty  $x_s$  provádíme pomocí aritmetického průměru vybraných (naměřených) hodnot jako

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Tento odhad je rovněž náhodnou veličinou ( $\bar{X}$ ). Dá se ukázat, že má normální rozdělení a její rozptyl je  $N$ -krát menší, takže pro směrodatnou odchylku platí  $\sigma_{\bar{X}} = \sigma_X / \sqrt{N}$ . Pro hustotu pravděpodobnosti tedy můžeme psát

$$f_{\bar{X}}(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma_{\bar{X}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x}-x_s)^2}{2\sigma_{\bar{X}}^2}}.$$

Formálně můžeme zavést bezrozměrnou veličinu

$$Y = \frac{\bar{X} - x_s}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - x_s}{\sigma_X / \sqrt{N}}. \quad (70)$$

Jelikož se v zásadě jedná o veličinu  $\bar{X}$ , která je pouze posunuta o konstantu a vynásobena konstantou, má rovněž normální rozdělení, a protože  $y = \sqrt{N}(\bar{x} - x_s) / \sigma_X$ , můžeme pro něj psát

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}. \quad (71)$$

Směrodatnou odchylku měřené veličiny  $X$  odhadujeme z naměřených hodnot pomocí vztahu

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{\nu}},$$

kde  $\nu = N - 1$  je počet stupňů volnosti. Výběrová směrodatná odchylka je opět náhodná veličina ( $S$ ). Pro odhad směrodatné odchylky aritmetického průměru z  $N$  hodnot obdobně platí  $\bar{s} = s / \sqrt{N}$ . Podobně jako vztahem (70) můžeme zavést bezrozměrnou veličinu

$$T = \frac{\bar{X} - x_s}{\bar{S}} = \frac{\bar{X} - x_s}{S / \sqrt{N}}. \quad (72)$$

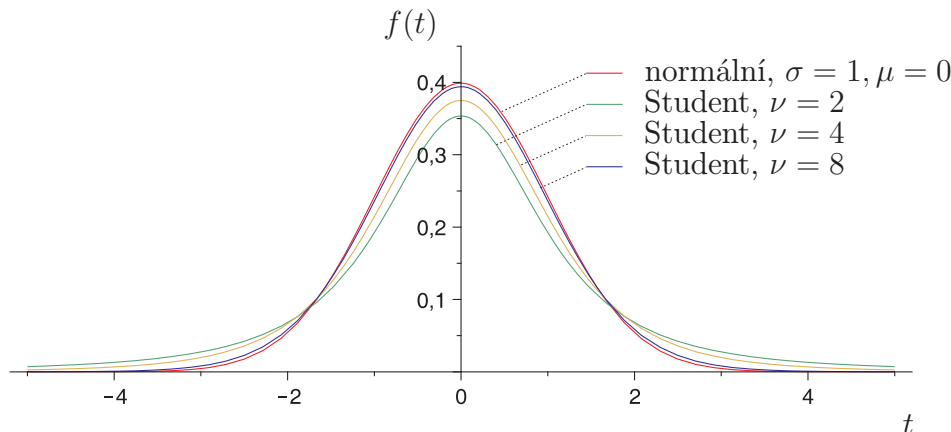
Jelikož se v tomto případě jedná o *podíl* dvou náhodných veličin, náhodná veličina  $T$  již nemá normální rozdělení. má rozdělení Studentovo<sup>21</sup>.

<sup>21</sup>V roce 1908 jej publikoval William Sealy Gosset pod přezdívkou Student, neboť jeho zaměstnavatel, pivovar Guinness v Dublinu, si nepřál, aby jeho zaměstnanci publikovali vědecké práce.

Dá se ukázat, že pro hustotu pravděpodobnosti Studentova rozdělení pro  $\nu \geq 1$  platí

$$f_T(t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad (73)$$

kde  $\Gamma(x)$  je tzv. *gama funkce*<sup>22</sup>.



Obrázek 4: Studentovo rozdělení pro různé počty stupňů volnosti a rozdělení normální.

Studentovo rozdělení pro  $\nu \rightarrow \infty$  přechází v rozdělení normální definované vztahem (71), průběhy pro různé počty stupňů volnosti jsou uvedeny v obrázku 4.

Pravděpodobnost, že hodnota  $t$  náhodné veličiny  $T$  bude ležet v intervalu  $\langle -t_p, t_p \rangle$  je možné vypočítat pomocí integrálu

$$P(-t_p \leq t \leq t_p) = \int_{-t_p}^{t_p} f_T(t, \nu) dt. \quad (74)$$

Protože, viz vztah (72), platí

$$t = \frac{\bar{x} - x_s}{\bar{s}},$$

můžeme psát

$$\begin{aligned} P\left(-t_p \leq \frac{\bar{x} - x_s}{\bar{s}} \leq t_p\right) &= P(-t_p \bar{s} \leq \bar{x} - x_s \leq t_p \bar{s}) = \\ &= P(-\bar{x} - t_p \bar{s} \leq -x_s \leq -\bar{x} + t_p \bar{s}) = \\ &= P(\bar{x} - t_p \bar{s} \leq x_s \leq \bar{x} + t_p \bar{s}). \end{aligned} \quad (75)$$

Vztah (75) lze interpretovat tak, že s pravděpodobností danou hodnotou  $t_p$ , kterou vypočteme pomocí integrálu (74), leží skutečná hodnota naměřené veličiny v intervalu  $\pm t_p \bar{s}$  kolem aritmetického průměru  $\bar{x}$ . Koeficienty  $t_p$  jsou totožné s koeficienty rozšíření definujícími rozšířenou nejistotu  $U$ , viz vztah (32), některé důležité hodnoty jsou uvedeny v tabulce 6. Z tabulky je patrné, že s rostoucím počtem stupňů volnosti velikost koeficientu  $t_p$  klesá. S rostoucím počtem naměřených hodnot tedy při stejné (zvolené) míře pravděpodobnosti klesá velikost intervalu, ve kterém se skutečná hodnota měřené veličiny s touto pravděpodobností nachází.

<sup>22</sup>Pro celočíselné argumenty platí  $\Gamma(n) = (n-1)!$ , tuto takzvaně vyšší transcendentní funkci i pro neceločíselné argumenty běžně nají programové balíky, jako např. Matlab nebo Maple.

$\nu$	$t_{\nu,95\%}$	$t_{\nu,99\%}$	$\nu$	$t_{\nu,95\%}$	$t_{\nu,99\%}$
2	4,303	9,925	20	2,086	2,845
3	3,182	5,841	30	2,042	2,750
4	2,776	4,604	35	2,030	2,724
5	2,571	4,032	40	2,021	2,704
6	2,447	3,707	45	2,014	2,690
7	2,365	3,499	50	2,009	2,678
8	2,306	3,355	55	2,004	2,668
9	2,262	3,250	60	2,000	2,660
10	2,228	3,169	65	1,997	2,654
11	2,201	3,106	70	1,994	2,648
12	2,179	3,055	75	1,992	2,643
13	2,160	3,012	80	1,990	2,639
14	2,145	2,977	85	1,988	2,635
15	2,131	2,947	90	1,987	2,632
16	2,120	2,921	95	1,985	2,629
17	2,110	2,898	100	1,984	2,626
18	2,101	2,878	$\infty$	1,960	2,576
19	2,093	2,861			

Tabulka 6: Koeficienty rozšíření pro  $\nu$  stupňů volnosti a intervaly spolehlivosti 95% a 99%.

## A.2 Některé fyzikální konstanty

Hodnoty fyzikálních konstant uvedených v tabulce 7 jsou převzaty z [10]. Číselná hodnota uvedená za symbolem  $\pm$  reprezentuje standardní nejistotu. Konstanty uvedené bez nejistoty jsou určeny (definovány) přesně.

Veličina	Hodnota
rychlost světla ve vakuu	$c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
magnetická konstanta	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{A}^{-2} = 12,566\,370 \dots \times 10^{-7} \text{ N}\cdot\text{A}^{-2}$
elektrická konstanta	$\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 = 8,854\,187 \dots \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
Newtonova gravitační konstanta	$G = (6,6742 \pm 0,0010) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Planckova konstanta	$h = (6,626\,0693 \pm 0,000\,0011) \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
elementární náboj	$e = (1,602\,176\,53 \pm 0,000\,000\,14) \cdot 10^{-19} \text{ C}$
hmotnost elektronu (klidová)	$m_e = (9,109\,3826 \pm 0,000\,0016) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
hmotnost protonu (klidová)	$m_p = (1,672\,621\,71 \pm 0,000\,000\,29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
hmotnost neutronu (klidová)	$m_n = (1,674\,927\,28 \pm 0,000\,000\,29) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
velikost měrného náboje elektronu	$e/m_e = (1,758\,820\,12 \pm 0,000\,000\,15) \cdot 10^{11} \text{ C}\cdot\text{kg}^{-1}$
Avogadrova konstanta	$N_A = (6,022\,1415 \pm 0,000\,0010) \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Faradayova konstanta	$F = (96\,485,3383 \pm 0,0083) \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$
molární plynová konstanta	$R = (8,314\,472 \pm 0,000\,015) \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
Boltzmannova konstanta	$k = (1,380\,6505 \pm 0,000\,0024) \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$
atomová hmotnostní jednotka	$u = (1,660\,538\,86 \pm 0,000\,000\,28) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Stefanova-Boltzmannova konstanta	$\sigma = (5,670\,400 \pm 0,000\,040) \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$
konstanta Wienova zákona	$b = (2,897\,7685 \pm 0,000\,0051) \cdot 10^{-3} \text{ m}\cdot\text{K}$

Tabulka 7: Některé fyzikální konstanty.

### A.3 Nonius

Nonius je pomocné měřítko posuvné podél hlavního měřítka měřicího přístroje, jehož dělení umožňuje odečítat z měřicího přístroje s přesností větší, než jakou umožňuje dělení stupnice měřítka hlavního.

Jestliže  $n - 1$  dílků hlavní stupnice, na níž měříme vyšetřovanou veličinu, rozdělíme na  $n$  dílků stupnice pomocné, pak pro velikost  $s'$  dílku pomocné stupnice platí

$$s' = \frac{n - 1}{n} s,$$

kde  $s$  je velikost dílku stupnice hlavní. Pomocná stupnice je krátká, vedená rovnoběžně podél stupnice hlavní, a přiléhá k ní. Pro rozdíl velikostí dílku hlavní a pomocné stupnice platí

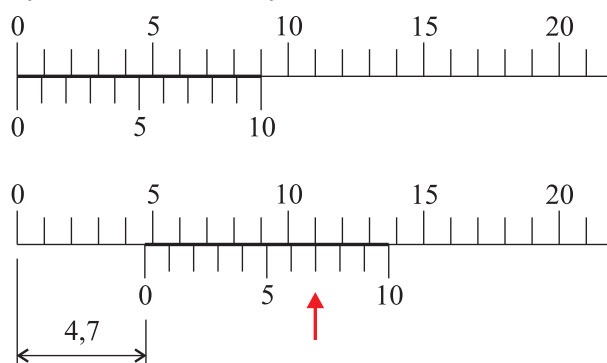
$$s - s' = \left(1 - \frac{n - 1}{n}\right) s = \frac{s}{n},$$

nazývá se nonickou diferencí a udává nejmenší hodnotu, kterou lze na zařízení ještě odečítat. Vydělíme-li obě strany předchozího vztahu velikostí dílku hlavní stupnice, dostaneme

$$\frac{s - s'}{s} = \frac{1}{n},$$

což je tzv. nonický poměr, který udává, kolikátou část dílku hlavní stupnice lze odečítat.

U přímých stupnic se často používá nonius desetinný, kde  $n - 1 = 9$  dílků hlavní stupnice je rozděleno na  $n = 10$  dílků stupnice pomocné. Jestliže například pro velikost dílku hlavní stupnice platí  $s = 1$  mm (jak je tomu například u posuvného měřítka), pak nonická diference  $s - s' = (1/10)$  mm, na noniu lze tedy odečítat desetiny milimetru.



Obrázek 5: Čtení hodnoty 4,7 na desetinném noniu.

U desetinného nonia udává nulová ryska pomocné stupnice počet celých dílků na hlavní stupnici, počet desetin dílku hlavní stupnice udává ta ryska stupnice pomocné, která je co nejbližší některé z rysek stupnice hlavní<sup>23</sup>. Konkrétní příklad čtení hodnoty 4,7 na desetinném noniu je uveden na obrázku 5. V praxi, například u posuvného měřítka, se také často používá nonius dvaetinný ( $n = 20$ , umožňuje odečítat s přesností 0,05 mm) a padesátinný ( $n = 50$ , umožňuje odečítat s přesností 0,02 mm).

<sup>23</sup>Příklad: Pokud nejsou hlavní a pomocná stupnice vůči sobě posunuty, navzájem splývají nulté dílky obou stupnic a kvůli nonické diferencí  $s/10$  je každý  $m$ -tý dílek stupnice pomocné posunut o vzdálenost  $ms/10$  před  $m$ -tý dílek stupnice hlavní. Z toho důvodu je desátý dílek stupnice vedlejší posunut o vzdálenost  $s$  před desátý dílek stupnice hlavní – splývá s dílkem devátým. Pokud například posuneme pomocnou stupnici o vzdálenost  $0,3s$  doprava oproti stupnici hlavní, bude splývat (v tomto případě se třetím) dílkem hlavní stupnice už dílek třetí na stupnici pomocné, a proto na ní odečteme hodnotu  $0,3s$ .

## Reference

- [1] Kirkup, L., Frenkel, R. B., *An Introduction to Uncertainty in Measurement Using the GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement)*, Cambridge University Press; 1 edition, 2006.
- [2] *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, ISO, 1995.
- [3] Bevington, P. R., Robinson, D. K., *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences*, McGraw-Hill Inc.,US; 3rd edition, 2002.
- [4] Rabinovich, S. G., *Measurement Errors and Uncertainties*, Springer; 3rd edition, 2010.
- [5] Grabe, M., *Measurement Uncertainties in Science and Technology*, Springer; 1st edition, 2010.
- [6] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. H., Flannery, B. P., *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 3 edition, 2007.
- [7] Rektorys, K., *Přehled užití matematiky I a II*, Prometheus, 2000.
- [8] Brož, J., a kol., *Základy fyzikálních měření I*, SNTL Praha, 1983.
- [9] Mádr, V., Knejzlík, J., Kopečný, J., Novotný, I., *Fyzikální měření*. SNTL, Praha, 1991.
- [10] Lide, D. R., *CRC Handbook of Chemistry and Physics, 87rd Edition*, CRC Press; 87rd edition, 2006.
- [11] Kapler, I., *Míry, jednotky, veličiny*, Repronis Ostrava, 2000.
- [12] Šindelář, V., Tůma, Z., *Metrologie, její vývoj a současnost*, Česká metrologická společnost, Praha, 2002.
- [13] English, J., *Úvod do praktické fyziky I*, Matfyzpress, Praha, 2006.