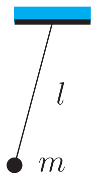
195 problémů z mechaniky, elektřiny a magnetismu

Milan Červenka, 3. května 2010

Obsah

1. Rozměrová analýza

Příklad 1.1: Matematické kyvadlo



Matematické kyvadlo je hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na nehmotném závěsu o délce l. Pomocí rozměrové analýzy odhadněte závislost doby kmitu T matematického kyvadla na jeho hmotnosti, délce a tíhovém zrychlení g.

Příklad 1.2: Přesýpací hodiny

Přesýpací hodiny odměřují čas pomocí doby, kterou se sype jemný písek úzkým hrdlem o ploše S z horní do dolní nádobky. Experimentálně můžeme zjistit, že rychlost sypání $\Delta m/\Delta t$ (hmotnost přesypaná za jednotku času) závisí na průřezu otvoru S mezi nádobami, hustotě zrnek písku ρ a (zřejmě) na tíhovém zrychlení g. Naopak, nezávisí na velikosti zrnek a množství písku. Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vztah pro určení rychlosti sypání $\Delta m/\Delta t$.

Příklad 1.3: Tlak v nitru Země a Slunce

Nemáme-li k dispozici další bližší informace, odhadujeme, že tlak v nitru hvězdy (planety) může záviset na její hmotnosti M, poloměru R, a jelikož souvisí s gravitačními účinky hmoty, i na gravitační konstantě $\varkappa = 6,672\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ Newtonova gravitačního zákona. Pomocí rozměrové analýzy odhadněte vzorec pro výpočet tlaku v nitru hvězdy (planety) a odhadněte konkrétní hodnotu pro Slunce ($M_\mathrm{S} = 1,99\times10^{30}\,\mathrm{kg}$, $R_\mathrm{S} = 696\,000\,\mathrm{km}$) a Zemi ($M_\mathrm{Z} = 5,97\times10^{24}\,\mathrm{kg}$, $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$).

Příklad 1.4: Planckova soustava jednotek

Německý fyzik Max Planck navrhl soustavu jednotek, která je založena na základních přírodních konstantách: rychlosti světla ve vakuu $c = 3\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, gravitační konstantě $\varkappa = 6,672\times10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ a Planckově konstantě $\hbar = 1,05\times10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$. Kombinací těchto konstant můžeme nalézt veličinu rozměru času (Planckův čas t_p), Veličinu rozměru délky (Planckovu délku l_p) a veličinu rozměru hmotnosti (Planckovu hmotnost m_p). Úvahy o kvantové gravitaci vedou k závěru, že v rozměrech řádově odpovídajících těmto jednotkám se zásadně mění charakter fyzikálních zákonů - Planckova délka a Planckův čas jsou možná nejmenšími, dále nedělitelnými kvanty prostoru a času. Pomocí rozměrové analýzy nalezněte velikost Planckových jednotek t_p, l_p a m_p.

Příklad 1.5: Struna

Asi každý, kdo viděl strunný hudební nástroj ví (nebo tuší), že frekvence, na které struna zní, nějak souvisí s její délkou l, silou F, kterou je struna natažena a její „tloušťkou“, kterou můžeme vyjádřit pomocí hmotnosti vztažené na jednotku délky μ. Najděte pomocí rozměrové analýzy vzorec pro frekvenci struny s využitím veličin l, F a μ.

2. Kinematika

Příklad 2.1: Autobusy na Strahov

Student se po přednášce z fyziky vrací pěšky z Dejvic na kolej Strahov a přitom si všimne, že autobus číslo 143 jej v protisměru míjí s intervalem $T_\mathrm{p} = 10\,\mathrm{min}\,48\,\mathrm{s}$, autobus jedoucí ve směru chůze s intervalem $T_\mathrm{v} = 13\,\mathrm{min}\,30\,\mathrm{s}$. Když dojde na kolej, spočítá interval T ve kterém autobus jezdí (za předpokladu, že v obou směrech je stejný) a poměr rychlosti své chůze ku rychlosti autobusu. Co mu vyjde?

Příklad 2.2: Automobil

Automobil rovnoměrně zpomaleným pohybem na dráze délky $l_b = 100\,\mathrm{m}$ změní svou rychlost z $v_1 = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ na $v_2 = 40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Jaké má při tomto manévru zrychlení?

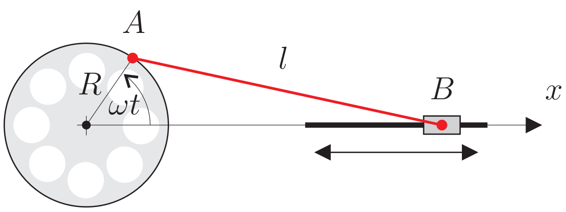
Příklad 2.3: Srážka vlaků?

Strojvůdce rychlíku jedoucího rychlostí $v_\mathrm{r} = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ spatří před sebou na téže koleji nákladní vlak jedoucí stejným směrem rychlostí $v_\mathrm{n} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. V okamžiku kdy jej spatřil, byla vzdálenost posledního vagónu nákladního vlaku a lokomotivy rychl9ku $s_0 = 200\,\mathrm{m}$. Strojvůdce velmi duchaplně okamžitě šlápl na brzdu, čímž rychlík uvedl do rovnoměrně zpomaleného pohybu se zpomalením $a = 1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Dojde ke srážce vlaků? Pokud ano, tak v jaké vzdálenosti od rychlíku v okamžiku registrace a jakou mají v okamžiku srážky vlaky vzájemnou rychlost?

Příklad 2.4: Bezpečně z Řevnic na Skalku a zpět

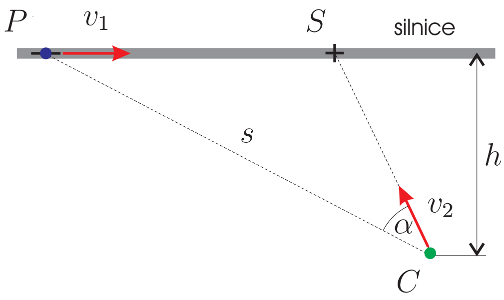
Kopec z Řevnic na Skalku je dlouhý. Cyklista se rozhodne, že cestu tam a zpět projede průměrnou rychlostí $\overline{v} = 20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Cestu nahoru projede průměrnou rychlostí $\overline{v}_1 = 12\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Jakou průměrnou rychlostí $\overline{v}_2$ musí sjet zpět, aby uskutečnil své předsevzetí? Byl by schopen splnit své předsevzetí, když by cestu nahoru projel průměrnou rychlostí $\overline{v}_1' = 10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$?

Příklad 2.5: Klikový mechanizmus



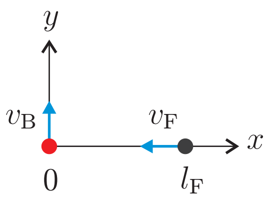
Klikový mechanizmus z obrázku je zařízení pro převod rotačního pohybu na translační. Určete polohu $x(t)$ koncového bodu táhla délky l, jestliže je spojeno s kolem o poloměru R otáčejícím se úhlovou rychlostí ω.

Příklad 2.6: Jak doběhnout pošťáka



Člověk stojící ve vzdálenosti $h = 50\,\mathrm{m}$ od silnice vidí pošťáka, který po ní jede na kole rychlostí $v_1 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (viz obrázek). V okamžiku kdy jej spatří, je jejich vzdálenost $s = 200\,\mathrm{m}$. Pod jakým úhlem α musí běžet k silnici rychlostí $v_2 = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, aby se s ním setkal a předal mu dopis? Jakou minimální rychlostí musí běžet, aby pošťáka doběhl?

Příklad 2.7: Ferda Mravenec a Beruška

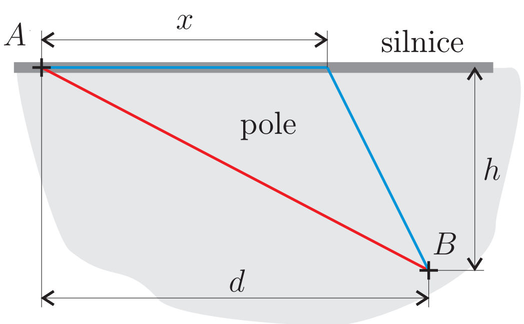


Beruška sedí ve středu kartézských souřadnic, Ferda Mravenec ve vzdálenosti l_{F} na ose x. V čase $t = 0$ začne Beruška lézt rychlostí v_{B} v kladném směru osy y a Ferda rychlostí v_{F} v záporném směru osy x. Najděte vzájemnou vzdálenost $l_{\mathrm{FB}}(t)$ jakožto funkci času, čas t_{n} kdy si jsou nejblíže a tuto vzdálenost l_{n}.

Příklad 2.8: Časová závislost vzdálenosti dvou těles

Dvě tělesa se ve stejný okamžik začala rovnoměrně přímočaře pohybovat ze stejného bodu, přičemž jejich vektory rychlostí svírají úhel α. Jaká je časová závislost jejich vzdálenosti $l(t)$, pokud jedno z těles se pohybuje rychlostí o velikosti v a druhé rychlostí o velikosti $2v$?

Příklad 2.9: Nejrychlejší cesta



Cyklista na horském kole se potřebuje dostat z bodu A do bodu B, viz obrázek, kde $d = 2\,\mathrm{km}$ a $h = 1\,\mathrm{km}$. Po silnici jede rychlostí $c = 30\,\mathrm{km/h}$, po zoraném poli rychlostí $v = c/3$. Jak dlouho pojede z A do B nejkratší cestou (tj. po poli)? V jaké vzdálenosti x od bodu A musí uhnout ze silnice na pole, aby se dostal do bodu B nejrychleji? Jak dlouho pojede touto cestou?

Příklad 2.10: Pohyb s proměnným zrychlením 1

Hmotný bod se pohybuje podél osy x tak, že pro jeho zrychlení platí

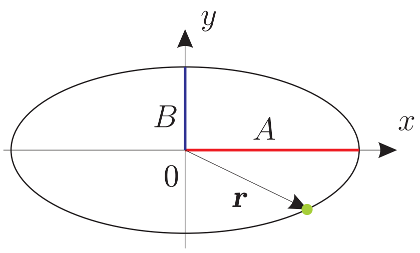
$$a = a_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right),$$

kde $a_0 > 0$, $k > 0$ jsou konstanty a t je čas. Vypočítejte rychlost v a polohu x bodu jako funkci času za předpokladu, že v čase $t = 0$ platí $v = 0$, $x = 0$.

Příklad 2.11: Pohyb s proměnným zrychlením 2

Hmotný bod se pohybuje přímočaře se zrychlením, které rovnoměrně klesá z hodnoty $a_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ v čase $t = 0$ na nulovou hodnotu v čase $t = \tau = 20\,\mathrm{s}$. Určete jeho rychlost a polohu v čase τ, víte-li, že pro $t = 0$ je $v = 0$ a $x = 0$.

Příklad 2.12: Elipsa



Hmotný bod se pohybuje v rovině xypo trajektorii zadané parametrickými rovnicemi

$$x = A\cos\omega t, \quad y = B\sin\omega t,$$

kde $A > B > 0$. Ukažte, že tato trajektorie je elipsa. Vypočítejte složky a velikost vektoru rychlosti. Jaká je maximální a minimální rychlost? Vypočítejte složky a velikost vektoru zrychlení.

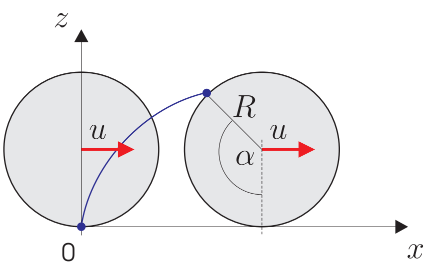
Příklad 2.13: Šroubovice

Nabitá částice v homogenním magnetickém poli se pohybuje po šroubovici, která je popsána parametrickými rovnicemi

$$x = A\cos\omega t, \quad y = A\sin\omega t, \quad z = Bt,$$

kde $A > 0$, B a ω jsou konstanty. Vypočítejte složky a velikost vektoru rychlosti, složky a velikost vektoru zrychlení, vektor zrychlení rozložte na tečnou a normálovou složku a vypočtěte poloměr křivosti trajektorie.

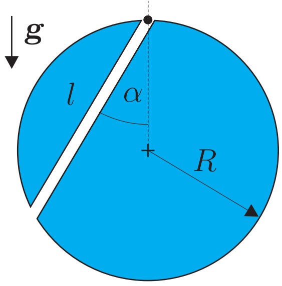
Příklad 2.14: Kamínek



Automobil se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí $\boldsymbol{u} = (u, 0, 0)$. Po jaké trajektorii se pohybuje kamínek uvízlý ve vzorku pneumatiky, jestliže její poloměr je R? Jaké jsou složky a velikost vektoru rychlosti kamínku? Jaká je nejmenší a největší velikost rychlosti kamínku? Jaké jsou složky a velikost vektoru zrychlení kamínku?

Příklad 2.15: Úloha z roku 1639

První český fyzik, Jan Marek Marci z Lanškrouna (1595-1667), ve své knize „O úměrnosti pohybu“ řešil tuto úlohu.



Malá kulička se může v tíhovém poli volně pohybovat ve žlábku, jehož směr svírá s vertikálou úhel α a prochází kruhem o poloměru R. Jak závisí doba průchodu kuličky žlábkem t_p na velikosti úhlu α?

Příklad 2.16: Na zámku Zbiroh

Turista na zámku Zbiroh se naklání nad studnu, přičemž mu do ní z náprsní kapsy košile vypadne mobilní telefon. Duchaplně ihned zapne stopky a změří, že šplouchnutí uslyší za čas $t = 6,24\,\mathrm{s}$ po vypadnutí telefonu. Jak hluboká je studna na zámku Zbiroh, jestliže tíhové zrychlení $g = 9,81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ a rychlost zvuku ve studni $c = 340\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Příklad 2.17: Volný pád 1

Těleso padá volným pádem z výšky h. Rozdělte tuto výšku na n úseků tak, aby doba pádu v každém úseku byla stejná, najděte vzorec pro délku i-tého úseku.

Příklad 2.18: Volný pád 2

Těleso padá volným pádem z výšky h. Rozdělte tuto výšku na n stejných úseků. Jaká bude doba pádu t_i v i-tém úseku?

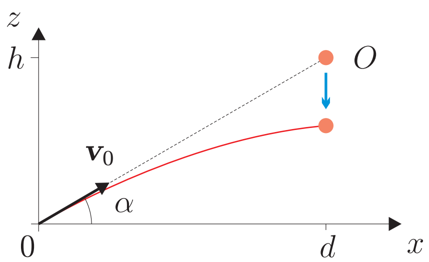
Příklad 2.19: Volný pád 3

Předmět spadl volným pádem z neznámé výšky H na zem. Pozorovatel změřil, že posledních h metrů předmět padal τ sekund. Z jaké výšky předmět spadl?

Příklad 2.20: Tečné a normálové zrychlení při vodorovném vrhu

Těleso bylo vrženo vodorovně z výšky h počáteční rychlostí o velikosti v_0. Jaká je v průběhu letu tělesa velikost jeho zrychlení celkového, tečného a normálového? Odpor vzduchu zanedbejte.

Příklad 2.21: Opice



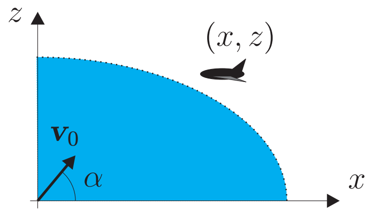
Lovec v Africe chce střelit opici[1], která se pohupuje na větvi stromu. Vodorovná vzdálenost mezi hlavní pušky a opicí je d, svislá h (viz obrázek). Lovec ví, že v okamžiku kdy opice zahlédne záblesk výstřelu (což je vzhledem k rychlosti světla prakticky okamžitě) se pustí a padá volným pádem k zemi. Pod jakým úhlem α musí lovec vystřelit, aby opici zasáhl? Velikost počáteční rychlosti střely je v_0.

Příklad 2.22: Jak daleko, tak vysoko

Pod jakým elevačním úhlem α musíme hodit předmětem, aby vzdálenost, do které dopadne, byla rovna maximální výšce, do které vystoupí?

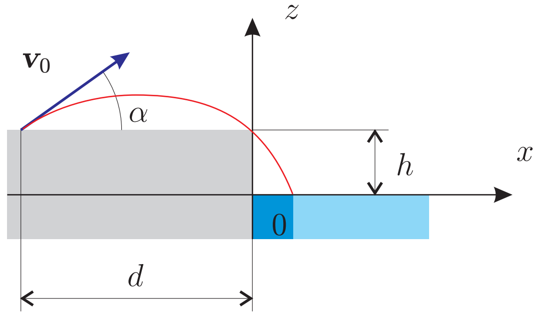
[1] Uspávací šipkou, opice skončí v ZOO, kde se jí bude docela líbit.

Příklad 2.23: Nebezpečná zóna



Najděte vztah popisující hranici nebezpečné zóny, pod kterou hrozí sestřelení letadla dělem, jehož střely mají konstantní velikost počáteční rychlosti v_0 a je možné pouze měnit jejich směr.

Příklad 2.24: Piráti

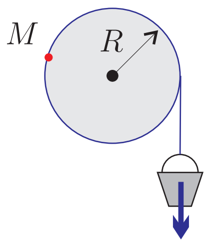


Na strmém útesu o výšce $h = 100\,\mathrm{m}$ je ve vzdálenosti $d = 1\,\mathrm{km}$ od moře pevnost s dělem bránící pobřeží. Do jaké vzdálenosti x_m od břehu jsou piráti chráněni útesem před dělovými koulemi? Velikost počáteční rychlosti dělových koulí je $v_0 = 120\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Příklad 2.25: Šikmý vrh na nakloněnou rovinu

Pod jakým úhlem α musíme šikmo vrhnout předmět na nakloněnou rovinu se sklonem β tak, abychom dohodili nejdále?

Příklad 2.26: Rumpál



Kbelík zavěšený na provázku omotaném kolem rumpálu o poloměru R padá do studny. přičemž jeho dráha je dané vztahem

$$s = \frac{1}{2}kt^2.$$

Jaká je velikost zrychlení mouchy sedící na rumpálu?

Příklad 2.27: Rotující bod

Hmotný bod se pohybuje po kružnici o poloměru $r = 0{,}1\,\mathrm{m}$, přičemž jeho úhlová souřadnice (v radiánech) je dána funkčním předpisem

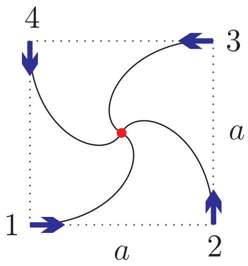
$$\varphi = 2 + 4t^3,$$

kde t je čas v sekundách. Jaká je velikost tečného zrychlení a_t a normálového zrychlení a_n tohoto bodu v čase $t = 2\,\mathrm{s}$? Jakou úhlovou souřadnici φ_α má bod v okamžiku, kdy vektor jeho zrychlení svírá s průvodičem úhel $\alpha = 45°$?

Příklad 2.28: Setrvačník

Setrvačník se otáčí s frekvencí $f_0 = 1\,500\,\mathrm{ot\,min}^{-1}$. Brzděním přejde do rovnoměrně zpomaleného pohybu a v čase $\tau = 30\,\mathrm{s}$ od počátku brzdění se zastaví. Jaké je jeho úhlové zrychlení ε a kolik otoček N v průběhu brzdění vykoná?

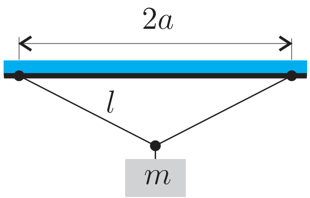
Příklad 2.29: Rakety



Čtyři samonaváděcí rakety jsou umístěny v rozích pomyslného čtverce o straně a. Jejich konstrukce je taková, že se pohybují rychlostí konstantní velikosti v a tak, že raketa 1 vždy míří přímo na raketu 2, raketa 2 vždy míří přímo na raketu 3, ta vždy míří na raketu 4 a ta na raketu 1. V čase $t = 0$ jsou rakety odpáleny. Vypočítejte za jak dlouho se srazí a po jakých trajektoriích se pohybují.

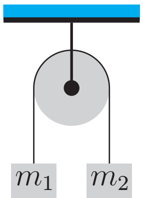
3. Dynamika hmotného bodu

Příklad 3.1: Jak zavěsit závaží



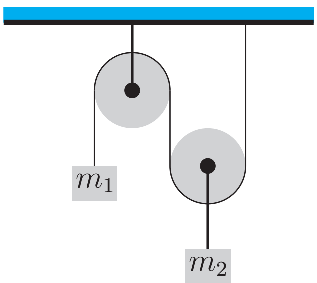
Na dva stejné řetízky je třeba zavěsit závaží o hmotnosti m, viz obrázek, přičemž hřebíky, ke kterým se řetízky připevní, jsou umístěny vodorovně ve vzdálenosti $2a$. Jakou délku $l > 2a$ musí řetízky mít, pakliže je nelze zatížit silou o velikosti větší než F_p? Hmotnost řetízků můžeme zanedbat.

Příklad 3.2: Jednoduchá kladka



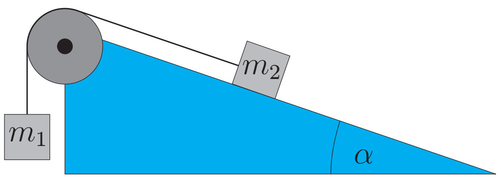
Na kladku z obrázku jsou pomocí pevného vlákna zavěšena závaží o hmotnostech m_1 a m_2. S jakým zrychlením se tato závaží pohybují, pokud můžeme hmotnost vlákna i volně se otáčející kladky zanedbat? Jakou silou je vlákno napínáno?

Příklad 3.3: Dvojitá kladka



Závaží o hmotnostech m_1 a m_2 jsou zavěšena na systému kladek z obrázku. Obě kladky se mohou volně otáčet, jejich hmotnost je natolik malá, že ji můžeme společně s hmotností pevného vlákna zanedbat. S jakým zrychlením se pohybují jednotlivá závaží a jaká je velikost síly napínající vlákno?

Příklad 3.4: Kladka a nakloněná rovina



Závaží o hmotnostech m_1 a m_2 jsou přes kladku propojena pevným vláknem, přičemž první visí na vlákně a druhé je umístěno na nakloněné rovině s úhlem sklonu α, viz obrázek. Vypočítejte zrychlení závaží a velikost síly napínající vlákno, víte-li, že koeficient smykového tření mezi nakloněnou rovinou a závažím je μ a že hmotnost vlákna i kladky můžete zanedbat.

Nápověda: Zamyslete se nad směrem třecí síly!

Příklad 3.5: Rovnoměrný pohyb po nakloněné rovině

Po nakloněné rovině s úhlem sklonu α se smýká směrem dolů předmět tak, že jeho rychlost je konstantní. Jakou velikost má koeficient smykového tření mezi předmětem a nakloněnou rovinou?

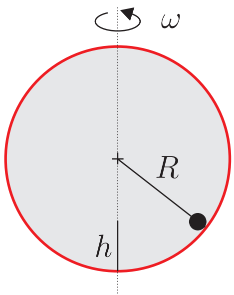
Příklad 3.6: Průjezd klopenou zatáčkou
Jakou maximální rychlostí $v_{\max}$ může automobil projet zatáčkou o poloměru R aby nedostal smyk, jestliže koeficient smykového tření mezi pneumatikami a vozovkou je μ a zatáčka je sklopena dovnitř oblouku pod úhlem α? Vypočtěte konkrétní hodnoty maximální rychlosti pro $R = 200\,\mathrm{m}$, $\mu = 0,6$, $\alpha_1 = 0°$ a $\alpha_2 = 30°$.

Příklad 3.7: Časově proměnná síla
Na hmotný bod o hmotnosti m, který je v klidu v počátku kartézských souřadnic začne v čase $t = 0$ působit proměnná síla $\boldsymbol{F} = (F_x, 0, 0)$, kde

$$F_x = F_0 \sin \omega t.$$

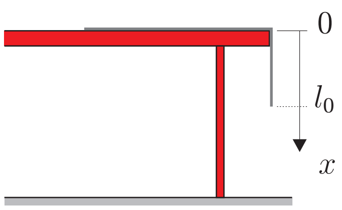
spočtěte jeho zrychlení, okamžitou, maximální, minimální a průměrnou rychlost a polohu hmotného bodu.

Příklad 3.8: Odstředivka



Odstředivka (viz obrázek) má tvar duté koule o poloměru R a otáčí se kolem své osy úhlovou rychlostí ω. V jaké výšce h se ustálí malá kulička a jakou celkovou silou působí na stěnu odstředivky?

Příklad 3.9: Lano na stole



Dokonale ohebné lano délky l a hmotnosti m leží na desce stolu, přičemž jeho část délky l_0 visí přes okraj dolů. Nalezněte časovou závislost polohy konce lana a jeho rychlosti za předpokladu, že lano po stole může klouzat bez tření a jeho rychlost v čase $t = 0$ je nulová. Omezte se na situaci, kdy část lana ještě spočívá na stole a lano se ještě nedotýká podlahy.

Příklad 3.10: Parašutista
Vypočítejte rychlost, kterou dopadne parašutista z velké výšky s nulovou počáteční rychlostí na zem za předpokladu, že se mu padák otevře a neotevře. Vypočítejte, z jaké výšky by musel vyskočit, aby stejnou rychlostí dopadl na zem, kdybychom mohli odpor vzduchu zanedbat. Vypočítejte závislost rychlosti parašutisty na čase.

Víme, že síla, kterou působí tekutina na rychle se pohybující těleso se dá vyjádřit Newtonovým vzorcem

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{o}} = -\frac{1}{2} C \rho S |\mathbf{v}| \mathbf{v},$$

kde S je čelní průřez obtékaného tělesa, $\mathbf{v}$ je jeho rychlost, ρ je hustota tekutiny (pro vzduch $\rho = 1,2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$) a C je koeficient závisející na tvaru tělesa. Pro otevřený padák budeme předpokládat $C_o = 1{,}33$, $S_o = 50\,\mathrm{m}^2$, pro parašutistu s neotevřeným padákem $C_n \approx 1$, $S_n \approx 1\,\mathrm{m}^2$. Hmotnost parašutisty i s výstrojí je $m = 80\,\mathrm{kg}$.

Příklad 3.11: Kulička v oleji

Vhodíme-li malou kuličku (brok) do vazké kapaliny, např. oleje,bude její pohyb brzdit třecí (Stokesova) síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{S}$, jejíž velikost je úměrná rychlosti pohybu a kterou můžeme vyjádřit vzorcem

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{S} = -k\mathbf{v}, \qquad k > 0.$$

Vypočítejte závislost rychlosti kuličky o hmotnosti m na čase, pokud pro $t = 0$ je její rychlost nulová a můžeme-li zanedbat vztlak kapaliny.

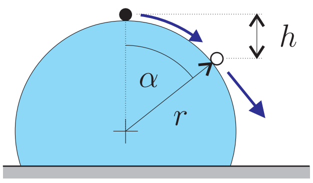
Příklad 3.12: Brzdění silou přímo úměrnou rychlosti

Na jaké dráze se zastaví kulička o hmotnosti m, která se pohybuje po dokonale hladké vodorovné ploše, působí na ni pouze síla

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{S} = -k\mathbf{v}, \qquad k > 0$$

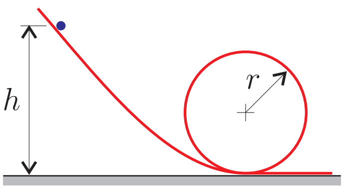
a v určitém čase je velikost její rychlosti v_0?

Příklad 3.13: Kulička na kouli



Na vrcholku velké dokonale hladké koule o poloměru r je umístěna malá kulička, jejíž poloměr můžeme oproti poloměru velké koule zcela zanedbat. Malá kulička se díky labilní rovnováze dá do pohybu a klouže po povrchu velké koule. Určete vertikální vzdálenost h ve které se od povrchu velké koule odlepí a vypočítejte jakou dráhu po povrchu koule urazí.

Příklad 3.14: Nebezpečný kousek

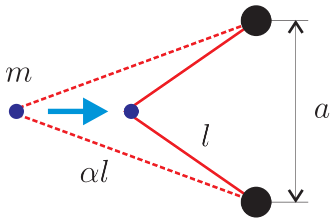


Artista na cirkusovém představení předvádí následující nebezpečný kousek, viz obrázek. Z výšky h se na koloběžce spustí na kruhovou dráhu o poloměru r. Jaká musí minimálně tato výška být, aby po celou dobu jízdy byl v kontaktu s dráhou? Přitom předpokládejte, že počáteční rychlost je nulová.

Příklad 3.15: Houpačka

Houpačka, kterou můžeme zjednodušeně popsat jako hmotný bod o hmotnosti m zavěšený na nehmotném závěsu o délce l byla vychýlena do úhlu φ_0 a puštěna. Vypočítejte závislost velikosti rychlosti houpačky na okamžité výchylce a její maximální hodnotu. Vypočítejte velikost síly napínající závěs houpačky v závislosti na výchylce a její maximální hodnotu.

Příklad 3.16: Prak

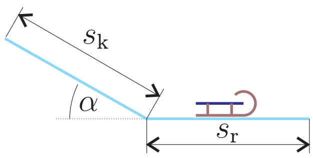


Prak si můžeme vyrobit tak, že mezi dvě ramena vidlice s roztečí a připevníme gumové vlákno délky $l > a$ a tuhosti k. Jakou počáteční rychlostí v_0 vymrští tento prak kámen o hmotnosti m, pokud gumové vlákno natáhneme na délku $l' = \alpha l, \alpha > 1$ a pokud jeho hmotnost oproti hmotnosti kamene můžeme zanedbat?

Příklad 3.17: Pružinový kanón

Pokud na svisle postavenou pružinu umístíme kuličku o hmotnosti $m = 0,1\,\mathrm{kg}$, stlačí se o vzdálenost $\Delta s = 2\,\mathrm{mm}$. Do jaké výšky pružina kuličku kolmo vzhůru vystřelí, pokud ji dále stlačíme o $s_1 = 15\,\mathrm{cm}$ a náhle pustíme? Hmotnost pružiny můžeme zanedbat.

Příklad 3.18: Sáňky



Sáňky sjedou s kopce délky s_k a sklonem α a po vodorovné rovině ujedou ještě vzdálenost s_r. Vypočítejte koeficient smykového tření μ mezi sněhem a sáňkami za předpokladu, že velikost rychlosti ve zlomu mezi kopcem a rovinou se nezmění.

Příklad 3.19: Je řidič vinen?

V obci, kde je povolená maximální rychlost $v_\mathrm{max} = 50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ přejelo auto slepici. Na silnici jsou vidět stopy po brzdění smykem, které mají délku $l = 39\,m$. Policista vyšetřující nehodu ví, že koeficient smykového tření mezi vozovkou a pneumatikami je $\mu = 0,5$. Jakou jel automobil rychlostí v okamžiku, než začal brzdit? Dostane řidič pokutu?

Příklad 3.20: Střela

Střela letící rychlostí $v = 400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ narazí do dřevěného kvádru a zasekne se v něm v hloubce $h = 30\,\mathrm{cm}$. Jakou rychlostí v' by vylétla tato střela z kvádru ze stejného materiálu o tloušťce $h' = 15\,\mathrm{cm}$? Předpokládejte přitom, že odpor, který dřevo klade střele je konstantní.

Příklad 3.21: Kabel visící ze střechy domu

Jakou práci je třeba vykonat na vytažení kabelu, který volně visí ze střechy domu, má délku $l = 20\,\mathrm{m}$ a hmotnost $m = 30\,\mathrm{kg}$?

Příklad 3.22: Provázek

Provázek délky l a hmotnosti m leží natažený na stole. Jakou délkou x musí viset přes okraj stolu, aby se právě dal vlastní vahou do pohybu, jestliže koeficient smykového tření mezi ním a stolem je μ? Jakou práci vykoná tíhová síla při stažení provázku ze stolu?

Příklad 3.23: Výstřel z děla
Dělová koule o hmotnosti $m = 24\,\mathrm{kg}$ opustila hlaveň rychlostí o velikosti $v = 500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ v čase $\tau = 0,008\,\mathrm{s}$ po zapálení roznětky. Jak velká síla na kouli působila, jestliže předpokládáme rovnoměrně zrychlený pohyb koule v hlavni? Jak velká práce byla vykonána na urychlení koule a jak dlouhá je hlaveň?

Příklad 3.24: Úder kladivem
Kladivo udeřilo do předmětu o hmotnosti $m = 0,5\,\mathrm{kg}$, přičemž mu udělilo rychlost $v = 0,3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Vypočítejte maximální velikost síly, jíž kladivo na předmět působilo za předpokladu, že velikost síly lineárně narůstala a pak klesala a úder trval $\tau = 1\,\mathrm{ms}$.

Příklad 3.25: Špatný zpěvák
Zpěvák stojí na pódiu a diváci na něj hází rajčata. Na jeho nebohé tělo dopadají kolmo rychlostí o velikosti $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ v průměru 10 rajčat o hmotnosti $m = 100\,\mathrm{g}$ za jednu sekundu. Jaká průměrná síla nutí zpěváka opustit hlediště?

Příklad 3.26: Pád z výšky na rotující Zemi
Z věže výšky h stojící na místě o zeměpisné šířce φ byla na zem upuštěna malá kulička. Vypočítejte, jakým směrem a v jaké vzdálenosti od vertikály dopadne na zem působením Coriolisovy síly. Vliv tření o vzduch zanedbejte. jaké výchylky můžeme očekávat v případě mrakodrapu Tchaj-pej 101, Eiffelovy věže či Petřínské rozhledny?
Nápověda: Vliv Coriolosovy síly v tomto případě bude velice malý a v prvním přiblížení můžeme uvažovat, že se kulička ve vertikálním směru pohybuje volným pádem.

Příklad 3.27: Řeka
Na severní zeměpisné šířce $\varphi = 45^\circ$ teče od severu k jihu řeka široká $d = 1\,\mathrm{km}$ rychlostí $v = 5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Vypočítejte, jaké převýšení vodní hladiny mezi pravým a levým břehem Δh způsobí Coriolisova síla.
Nápověda: Vodní hladina je kolmá k výslednici působících sil.

Příklad 3.28: Závaží na horizontálně kmitající desce
Vodorovná deska koná kmitavý pohyb v horizontálním směru s periodou $T = 5\,\mathrm{s}$. Závaží ležící na desce se začne smýkat v okamžiku, kdy amplituda kmitů dosáhne velikosti $x_0 = 0,5\,\mathrm{m}$. Jaký je koeficient smykového tření μ mezi tělesem a deskou?

Příklad 3.29: Závaží na vertikálně kmitající desce
Závaží o hmotnosti $m = 2\,\mathrm{kg}$ leží na vertikálně kmitající desce, jejíž amplituda výchylky $z_0 = 3\,\mathrm{cm}$ a perioda $T = 0,5\,\mathrm{s}$, Jaká maximální síla působí na závaží? Pro jakou maximální amplitudu kmitů z_m bude při stejné periodě závaží na desce ještě v klidu ležet?

Příklad 3.30: Těleso zavěšené na pružině

Zavěsíme-li těleso o hmotnosti $m = 200\,\mathrm{g}$ na pružinu, prodlouží se o $\Delta y_0 = 3,9\,\mathrm{cm}$. Poté pružinu s tělesem prodloužíme o $\Delta y = 2\,\mathrm{cm}$ ve vertikálním směru a pustíme. S jakou periodou bude těleso kmitat? Jaká bude jeho maximální rychlost a zrychlení?

Příklad 3.31: Jedno závaží na dvou pružinách

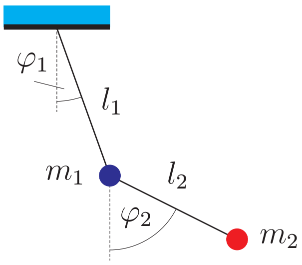
Máme dvě pružiny stejné délky s různými tuhostmi k_1 a k_2. Zavěsíme-li těleso neznámé hmotnosti na pružinu s tuhostí k_1, kmitá na ní s periodou T_1. Na pružině s tuhostí k_2 kmitá toto těleso s periodou T_2. Vypočítejte s jakou periodou T_s a T_p bude těleso kmitat, když jej **a)** zavěsíme na obě pružiny zapojené pod sebe (sériově) a **b)** vedle sebe (paralelně).

Příklad 3.32: Bungee jump

Odvážlivec o hmotnosti m se vrhne střemhlav z mostu zavěšen na pružném laně, které má nezatížené délku l_0 a tuhost k. Vypočítejte, na jakou délku se lano maximálně natáhne, pokud zanedbáte odpor vzduchu, hmotnost lana a pokud budete předpokládat, že lano se řídí Hookovým zákonem (velikost vratné síly je přímo úměrná prodloužení).

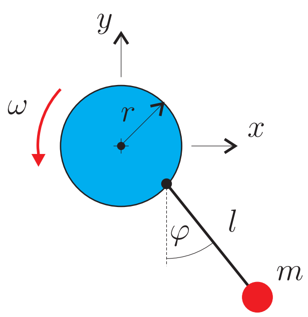
4. Lagrangeovy rovnice II. druhu

Příklad 4.1: Dvojité kyvadlo



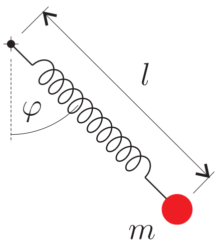
Matematické kyvadlo o délce závěsu l_2 a hmotnosti m_2 je zavěšeno na matematické kyvadlo o délce závěsu l_1 a hmotnosti m_1. Najděte pohybové rovnice pro takovéto dvojité kyvadlo za předpokladu, že obě kyvadla se mohou pohybovat pouze v jedné rovině.

Příklad 4.2: Kyvadlo na rotujícím kotouči



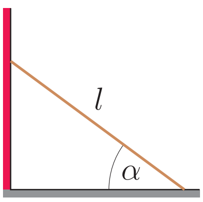
Matematické kyvadlo o hmotnosti m a délce závěsu l je volně uchyceno ve vzdálenosti r od osy kotouče, který rotuje úhlovou rychlostí ω, přičemž osy otáčení kotouče a kyvadla jsou rovnoběžné. Najděte pohybovou rovnici popisující pohyb kyvadla.

Příklad 4.3: Závaží na pružině



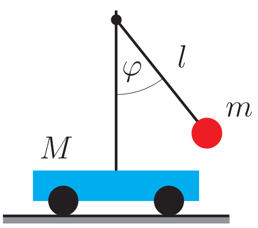
Na pružinu délky l_0 s tuhostí k zavěsíme závaží o hmotnosti m. Najděte pohybové rovnice závaží zavěšeného na této pružině za předpokladu, že se pružina může volně otáčet v jedné rovině a že její hmotnost můžeme vzhledem k hmotnosti závaží zanedbat.

Příklad 4.4: Násada od koštěte



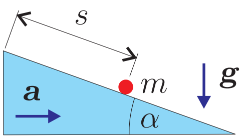
Násada od koštěte (homogenní tenká tyč) hmotnosti m a délky l je opřena na jedné straně o dokonale hladkou stěnu a o dokonale hladkou podlahu na straně druhé. Po uvolnění začne klouzat k zemi. Najděte pohybovou rovnici pro zobecněnou souřadnici α za předpokladu, že je pohyb rovinný.

Příklad 4.5: Kyvadlo na vozíku



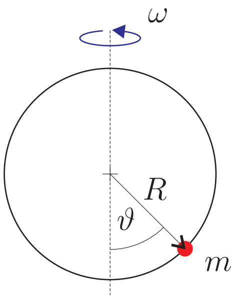
Na vozíku o hmotnosti M, který se může volně vodorovně pohybovat, je umístěno matematické kyvadlo o hmotnosti m a délce závěsu l. Najděte pohybové rovnice vozíku a kyvadla, jestliže rovina kmitů kyvadla je rovnoběžná s přímkou, podél níž se může vozík pohybovat.

Příklad 4.6: Částice na nakloněné rovině



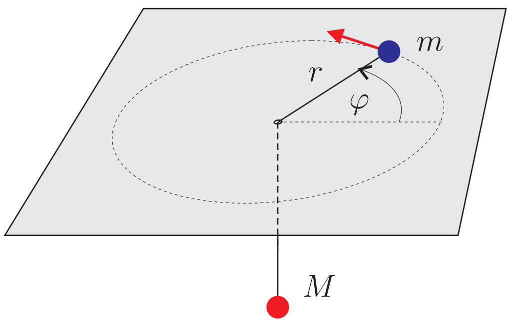
Nakloněná rovina s úhlem sklonu α (viz obrázek) se pohybuje podél vodorovné přímky rovnoměrně zrychleně tak, že pro polohu jejího nejvyššího bodu platí $x_{\mathrm{n}} = at^2/2$. Najděte pohybovou rovnici částice o hmotnosti m, která může po nakloněné rovině volně bez tření klouzat. Pro jaké a může setrvávat částice na nakloněné rovině v klidu?

Příklad 4.7: Korálek na drátě



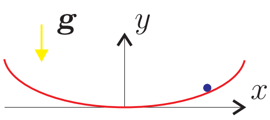
Korálek o hmotnosti m je navléknutý na kruhové drátěné smyčce o poloměru R, po které může volně klouzat. Drátěná smyčka se otáčí kolem svislé osy procházející jejím středem úhlovou rychlostí ω. Najděte pohybovou rovnici korálku.

Příklad 4.8: Kuličky spojené provázkem



Dvě malé kuličky o hmotnostech m a M jsou spojeny provázkem délky l, jehož hmotnost můžeme zanedbat, provlečeným otvorem ve stole. Kulička o hmotnosti m klouže bez tření po vodorovné, dokonale hladké desce stolu. Najděte pohybové rovnice kuliček.

Příklad 4.9: Cykloidální kyvadlo



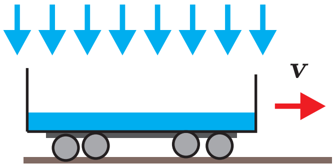
Malá kulička o hmotnosti m se může pohybovat volně bez tření po trajektorii popsané parametrickými rovnicemi cykloidy

$$x = R(\varphi + \sin\varphi), \quad y = R(1 - \cos\varphi),$$

kde $R > 0$ a $\varphi \in < -\pi, \pi >$. Ukažte, že pokud kuličku vychýlíme z rovnovážné polohy, nebude perioda jejích kmitů záviset na velikosti výchylky. Spočítejte tuto periodu. **Nápověda:** Za zobecněnou souřadnici zvolte $q = \sin(\varphi/2)$.

5. Dynamika soustavy hmotných bodů

Příklad 5.1: Železniční vagón v dešti

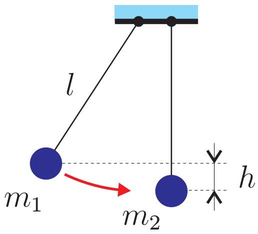


Prázdný železniční vagón o hmotnosti m_0 se pohybuje bez tření po vodorovných kolejích rychlostí o velikosti v_0. V čase $t = 0$ do něj začne pršet, přičemž přírůstek hmotnosti vagónu za jednotku času díky dešťové vodě je

$$\alpha = \frac{\Delta m}{\Delta t}.$$

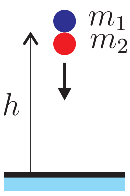
Jek se bude s časem měnit jeho rychlost dokud nedojde k jeho naplnění? Jak se bude s časem měnit jeho rychlost od okamžiku, kdy se celý naplní vodou a ta z něj začne vytékat? Nechť má vagón v tomto okamžiku t_1 hmotnost m_1 a rychlost o velikosti v_1.

Příklad 5.2: Jednoduchý rázostroj



Kuličku o hmotnosti m_1 na jednoduchém rázostroji vychýlíme do výšky h, pustíme, a necháme srazit s kuličkou o hmotnosti m_2. Vyšetřete do jaké výšky h_1 a h_2 se kuličky vychýlí po srážce za předpokladu, že se jedná o srážku dokonale pružnou. Obě kuličky jsou zavěšeny na závěsech délky l, jejichž hmotnost můžeme zanedbat. Jakými směry se odráží kuličky v závislosti na poměru hmotností m_1 a m_2?

Příklad 5.3: Urychlovač

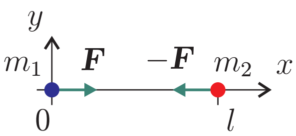


Dva míčky o hmotnostech m_1 a m_2, kde $m_1 < m_2$ umístěné nad sebou tak, že lehčí je nad těžším, pustíme na zem z výšky h. Vypočítejte výšky h_1 a h_2, do kterých míčky po odrazu od země vyskočí. Pro jaký poměr hmotností vyskočí lehčí míček nejvýše a jaká je tato výška? Předpokládejte přitom, že všechny rázy jsou dokonale pružné, že rozměry míčků můžeme oproti výškám h, h_1 a h_2 zanedbat a že jejich pohyb (po odrazu) probíhá podél přímky.

Příklad 5.4: Pašeráci

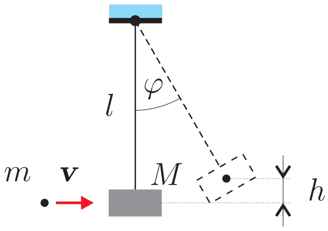
Dvě pašerácké lodě o hmotnostech $m_1 = 500\,\mathrm{kg}$ a $m_2 = 1000\,\mathrm{kg}$ se pohybují proti sobě. V okamžiku kdy se míjí, předají si posádky navzájem pytle se zbožím o hmotnosti $m = 50\,\mathrm{kg}$. Následkem výměny se první loď zastaví a druhá pokračuje původním směrem rychlostí $v_2' = 8,5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Jaké byly rychlosti v_1 a v_2 loděk před výměnou zboží?

Příklad 5.5: Dvě částice



Částice o hmotnosti m_1 je umístěna v počátku souřadné soustavy, částice o hmotnosti m_2 ve vzdálenosti l na ose x. Vypočítejte v jakém čase, na jakém místě a jakou vzájemnou rychlostí se částice srazí, pokud se vzájemně přitahují silou konstantní velikosti F.

Příklad 5.6: Balistické kyvadlo



Balistické kyvadlo, viz obrázek, je zařízení, pomocí něhož lze zjistit rychlost projektilu (střely). Střela o hmotnosti m je vypálena rychlostí neznámé velikosti v do terčové části balistického kyvadla, která má hmotnost $M \gg m$ a v níž se zasekne. Najděte vztah pro velikost rychlosti střely v závislosti na výchylce kyvadla. Vzdálenost terčové části od osy otáčení je l, hmotnost závěsu můžeme zanedbat. Jaká část kinetické energie střely se využije na vychýlení kyvadla?

Příklad 5.7: Střela v krabici

Střela o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{g}$ byla vypálena do krabice s pískem o hmotnosti $M = 2\,\mathrm{kg}$ ležící na vodorovné podložce a zasekla se v ní, přičemž ji posunula o vzdálenost $l = 25\,\mathrm{cm}$. Víte-li, že koeficient smykového tření mezi krabicí a podložkou $\mu = 0,2$, vypočítejte rychlost střely a dobu pohybu krabice.

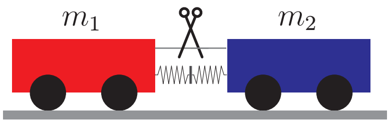
Příklad 5.8: Chůze na lodi

Člověk o hmotnosti $m = 75\,\mathrm{kg}$ stojí na loďce o délce $l = 2\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $M = 25\,\mathrm{kg}$. O jakou vzdálenost se posune vzhledem ke břehu když přejde z jednoho konce lodě na druhý? Předpokládejte přitom, že odpor vody je možné zanedbat.

Příklad 5.9: Nezabrzděné dělo

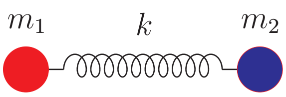
Z děla o hmotnosti M, které se může volně pohybovat po vodorovné zemi byl vystřelen projektil o hmotnosti m. Vypočítejte směr počáteční rychlosti projektilu, jestliže elevační úhel děla byl α.

Příklad 5.10: Dva vozíky na pružině



Dva vozíky o hmotnostech m_1 a m_2, které se mohou pohybovat bez tření podél vodorovné přímky, opatřené pružinovými nárazníky jsou spojeny pevným vláknem tak, že pružiny tuhosti k jsou dohromady stlačeny o vzdálenost Δx. Jakými rychlostmi se budou vozíky pohybovat po přestřižení vlákna, pokud byly původně v klidu?

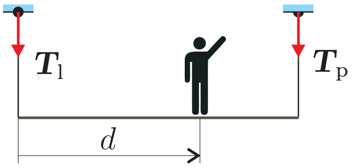
Příklad 5.11: Dvě závaží na pružině



Dvě závaží o hmotnostech m_1 a m_2 jsou spojena pružinou o tuhosti k. Vypočítejte periodu kmitů tohoto systému za předpokladu, že na něj nepůsobí vnější síly a že pohyb je jednorozměrný,

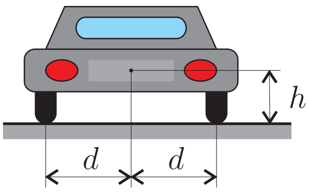
6. Mechanika tuhého tělesa

Příklad 6.1: Visutá lávka



Na visuté lávce o délce l a hmotnosti M stojí ve vzdálenosti d člověk o hmotnosti m. Vypočítejte, jakými silami jsou napínány závěsy držící lávku. Hmotnost závěsů zanedbejte.

Příklad 6.2: Auto v zatáčce

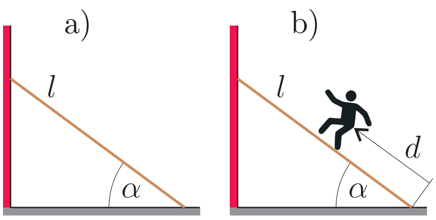


Automobil o hmotnosti $m = 800\,\mathrm{kg}$ projíždí neklopenou zatáčkou o poloměru křivosti $r = 180\,\mathrm{m}$ rychlostí $v = 108\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ vypočítejte, jaké síly F_l, F_p působí na levá a pravá kola, pokud je střed křivosti zatáčky nalevo od automobilu. Těžiště automobilu leží ve výšce $h = 0,5\,\mathrm{m}$ nad zemí uprostřed mezi koly vzdálenými $2d = 2\,\mathrm{m}$. Jakou maximální rychlostí v_m může automobil projet zatáčkou po čtyřech kolech?

Příklad 6.3: Jízda smrti

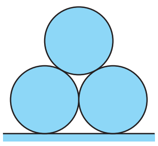
Jednou z cirkusových atrakcí je jízda na motocyklu po dráze tvořené vnitřní stěnou válce stojícího na své podstavě. Jakou nejmenší rychlostí musí motocyklista ve vodorovném směru jet, aby se na svislé stěně udržel? Jaký úhel α při této rychlosti svírá motocyklista vzhledem ke kolmici na stěnu? Poloměr dráhy $r = 10\,\mathrm{m}$, koeficient smykového tření mezi stěnou a pneumatikou $\mu = 0,4$ a vzdálenost hmotného středu motocyklu i s jezdcem $h = 1\,\mathrm{m}$ od bodu dotyku pneumatiky a stěny.

Příklad 6.4: Žebřík



O stěnu domu stojí opřený žebřík délky l. Koeficient smzkov0ho tření mezi žeb5íkem a zemí je μ, tření mezi žebříkem a stěnou můžeme zanedbat. Vypočítejte a) jaký nejmenší může být úhel α_{min}, aby žebřík nesklouzl. Zjistěte b) co se stane, když po žebříku opřeném pod úhlem α_{min} vystoupí člověk do vzdálenosti d.

Příklad 6.5: Lahváče



Následující úlohu lze vyřešit snadno i experimentálně, nicméně bychom to měli zvládnout i teoreticky. Tři lahve od piva postavíme na sebe jako malou pyramidu na skleněnou podložku. Udrží se pyramida, nebo se lahve rozjedou?

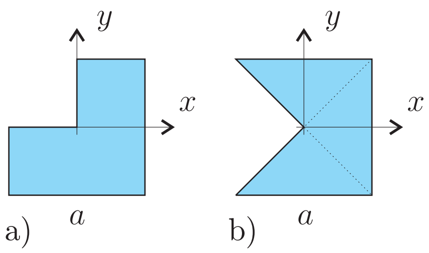
Příklad 6.6: Těžiště kužele

Určete polohu těžiště homogenního kužele o výšce h a poloměru základny a.

Příklad 6.7: Těžiště polokoule

Určete polohu těžiště homogenní polokoule o poloměru a.

Příklad 6.8: Těžiště rovinných objektů

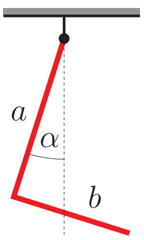


Najděte polohy těžiště rovinných objektů, které získáme a) vyříznutím čtverce, b) vyříznutím trojúhelníka z homogenního čtverce o délce strany a.

Příklad 6.9: Půlkruhový stůl

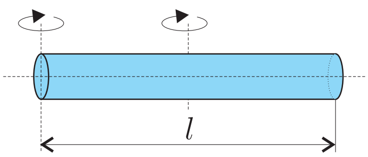
Do jakého místě je nejlepší umístit nohu ke stolu s půlkruhovou homogenní deskou o poloměru R?

Příklad 6.10: Ohnutý drát



Homogenní tenký drát konstantního průřezu byl ohnut do pravého úhle tak, že jeho ramena mají délku a a b. Poté byl volně zavěšen ke stropu. Vypočítejte, pod jakým úhlem od vertikály je odkloněno rameno, za které drát visí.

Příklad 6.11: Moment setrvačnosti tyče



Vypočítejte moment setrvačnosti dlouhé a tenké homogenní tyče konstantního průřezu délky l a hmotnosti m, pokud je osa rotace kolmá na osu tyče a prochází a) středem tyče a b) okrajem tyče.

Příklad 6.12: Moment setrvačnosti válce

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenního válce o poloměru R a hmotnosti m, který rotuje kolem své osy.

Příklad 6.13: Moment setrvačnosti koule

Vypočítejte moment setrvačnosti homogenní koule o hmotnosti m a poloměru R otáčející se kolem osy procházející středem.

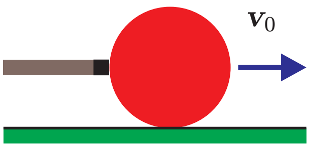
Příklad 6.14: Moment setrvačnosti míče

Vypočítejte moment setrvačnosti míče o hmotnosti m a poloměru R pro osu rotace procházející středem míče. Míč si lze představit jako homogenní kulovou slupku zanedbatelné tloušťky (s ohledem na poloměr R).

Příklad 6.15: Závod koule a válce

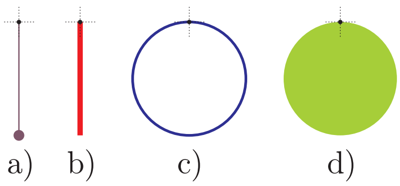
Na nakloněnou rovinu s úhlem sklonu α položíme homogenní kouli a válec. Oba objekty se začnou bez smýkání kutálet dolů. S jakým zrychlením se budou pohybovat? Který z objektů se bude kutálet rychleji?

Příklad 6.16: Úder tágem do koule



Tágo bouchne do středu kulečníkové koule, takže se tato začne po stole smýkat rychlostí o počáteční velikosti v_0. Koeficient smykového tření mezi plátnem stolu a koulí je μ. Díky tření se koule postupně roztáčí, až se začne pohybovat čistě valivým pohybem (kutálet). Jakou konečnou rychlostí se bude koule kutálet?

Příklad 6.17: Různá kyvadla

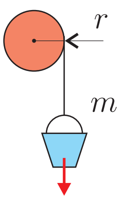


Máme čtyři objekty o hmotnosti, které jsou zavěšeny tak, aby mohly kývat kolem pevné osy: a) matematické kyvadlo (hmotný bod zavěšený na nehmotném závěsu délky L), b) tenkou tyčku délky l, c) obruč o poloměru r_{o} a d) kruhová deska o poloměru r_{d}. Určete, jaké rozměry musí mít tyčka, obruč a kruhová deska, aby kývaly stejně jako matematické kyvadlo. Tlumení kyvadel zanedbejte

Příklad 6.18: Minimální perioda

V jaké vzdálenosti od středu homogenní kruhové desky o poloměru R musí být osa otáčení rovnoběžná s osou desky, aby perioda takto vytvořeného kyvadla byla minimální?

Příklad 6.19: Rumpál ještě jednou

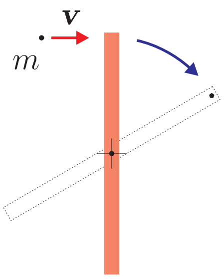


Na rumpálu o poloměru r a momentu setrvačnosti J je na namotaném laně zavěšen kbelík o hmotnosti m. S jakým zrychlením padá kbelík do studně, pokud se může rumpál volně otáčet a hmotnost lana můžeme zanedbat?

Příklad 6.20: Tovární komín

Starý tovární komín výšky h tvaru dutého válce byl u základny podkopán a spadl. Jakou rychlostí dopadl na zem jeho nejvyšší bod? Bod v jaké výšce z dopadl na zem stejnou rychlostí, jako kdyby padal volným pádem.

Příklad 6.21: Výstřel na tyč



Homogenní dřevěná tyč délky $l = 1\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $M = 2\,\mathrm{kg}$ se může volně otáčet kolem osy, která prochází kolmo jejím těžištěm. Byla do ní vypálena střela kolmo k ose rotace i tyči, která se zasekla na jejím konci. Velikost rychlostí střely $v = 200\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, hmotnosti $m = 10\,\mathrm{g}$. Jakou úhlovou rychlostí se tyč se zaseknutou střelou roztočila?

Příklad 6.22: Úder do volně ležící tyčky

Tyčka délky $l = 1,2\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $m = 0,1\,\mathrm{kg}$ leží na dokonale hladké vodorovné rovině. Na jeden konec tyčky bylo kolmo vodorovně udeřeno, přičemž velikost impulsu úderu byla $I = 10^{-2}\,\mathrm{Ns}$. Vypočtěte, jakou rychlostí $\mathbf{v}_\mathrm{s}$ se pohybuje hmotný střed tyčky po úderu. Vypočtěte, jakou úhlovou rychlostí ω se tyčka po úderu otáčí. Vypočtěte, jakou vzdálenost L tyčka urazí, než vykoná jednu otočku.

Příklad 6.23: Jak přemístit bednu

Bednu tvaru krychle je třeba přemístit do určité vzdálenosti, která se rovná celočíselnému násobku délky její hrany. Jednou ji táhneme po zemi, podruhé převracíme přes hranu. Koeficient smykového tření mezi bednou a zemí je μ. Pro jaké μ je práce vykonaná v obou případech přepravy stejná?

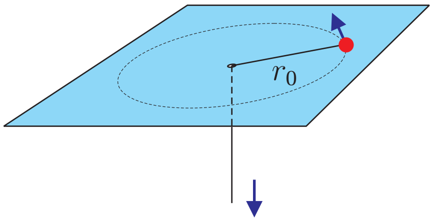
Příklad 6.24: Jak pootočit kosmickou lodí

V ose kosmické lodi je umístěn elektromotor, jehož moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení je $J_\mathrm{s} = 2 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$. Kolikrát se musí rotor vzhledem k palubě kosmické lodi otočit, má-li se tato pootočit o úhel $\varphi_\mathrm{l} = 30°$? Moment setrvačnosti **celé** lodi vzhledem k ose otáčení je $J_\mathrm{l} = 12\,\mathrm{kg\,m^2}$.

Příklad 6.25: Na kolotoči

Člověk o hmotnosti $m = 80\,\mathrm{kg}$ stojí na okraji vodorovné kruhové desky o poloměru $r = 5\,\mathrm{m}$, která se může volně (bez tření) otáčet kolem své osy. Vypočítejte, jakou úhlovou rychlostí a jakým směrem se bude deska, která byla původně v klidu, otáčet, pokud člověk po jejím obvodu začne kráčet rychlostí $v = 1,5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Moment setrvačnosti desky je $J_\mathrm{d} = 4000\,\mathrm{kg\,m^2}$, rozměry člověka (vzhledem k desce) zanedbejte.

Příklad 6.26: Kulička na stole



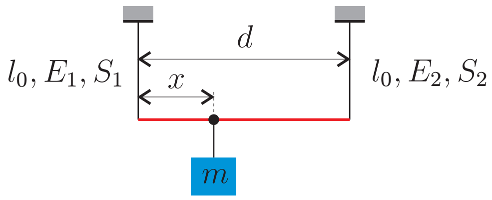
Na vodorovném, dokonale hladkém stole rotuje na provázku malá kulička po kruhové trajektorii s poloměrem r_0. Provázek, jehož hmotnost můžeme zanedbat, je provlečen otvorem skrz desku stolu. Vypočítejte, jakou práci musíme vykonat, abychom zatáhnutím za provázek zmenšili poloměr trajektorie kuličky na polovinu, jestliže byla původně její kinetická energie E_{k0}.

7. Deformace tuhého tělesa

Příklad 7.1: Tržná délka drátu

Jakou délku l musí mít měděný drát zavěšený za jeden konec, aby se přetrhl vlastní vahou? Pro hustotu mědi a mez pevnosti platí $\rho = 8930\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $\sigma_\mathrm{p} = 200\,\mathrm{MPa}$.

Příklad 7.2: Jak zavěsit břemeno



Najděte vzdálenost x, do které je na nosník zanedbatelné hmotnosti třeba zavěsit břemeno hmotnosti m, aby **a)** mechanické napětí v obou závěsech bylo stejné a **b)** prodloužení obou závěsů bylo stejné.

Délka obou závěsů l_0 bez zatížení je stejná, průřez a modul pružnosti závěsů je různý (S_1, E_1, S_2, E_2).

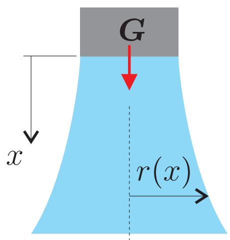
Příklad 7.3: Šplh po pružném laně

Lano délky l_0 volně visí zavěšené za jeden konec. Jakou práci musí vykonat člověk hmotnosti m, aby vyšplhal po celé délce lana **a)** za předpokladu, že lano je tuhé a **b)** za předpokladu, že jeho modul pružnosti je E, průřez S a hmotnost lana můžeme zanedbat.

Příklad 7.4: Prodloužení tyče vlastní vahou

O jakou délku Δl se prodlouží vlastní vahou tyč délky l a průřezu S zavěšená za jeden konec, jestliže její materiál má hustotu ρ a Youngův modul pružnosti E?

Příklad 7.5: Pilíř



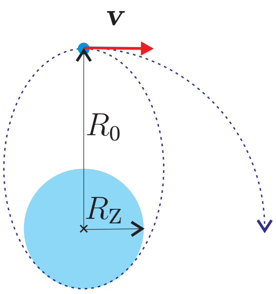
Nosný pilíř z materiálu o hustotě ρ kruhového průřezu má podepírat břemeno tíhy G. Jaká musí být závislost poloměru pilíře na vzdálenosti od břemene $r(x)$, aby normálové napětí σ_0 bylo po celé jeho délce konstantní?

8. Gravitační pole

Příklad 8.1: Geostacionární družice
Vypočítejte, do jaké výšky h nad povrch Země je třeba umístit umělou družici a jakou rychlost jí je třeba udělit, aby byla geostacionární, tj. její poloha vzhledem k Zemi byla neproměnná.

Příklad 8.2: Lano visící z nebe
Do jaké minimální vzdálenosti od Země by muselo dosahovat dokonale pevné lano, aby mohlo být uchyceno někde na rovníku a sloužilo k výtahové dopravě na geostacionární dráhu?

Příklad 8.3: Nejmenší rychlost družice



Ve vzdálenosti R_0 od středu Země je vodorovně vystřelena určitou rychlostí umělá družice. Jaká musí být velikost této rychlosti v_{kr}, aby se pohybovala po kruhové trajektorii? Jaká musí být minimální velikost rychlosti v_{min}, aby tato družice nedopadla na Zemi? **Nápověda:** Vzdálenost perigea eliptické trajektorie musí být právě rovna poloměru Země R_Z.

Příklad 8.4: Doba oběhu družice kolem planety
Jak souvisí perioda družice obíhající planetu v její těsné blízkosti po kruhové trajektorii s průměrnou hustotou planety?

Příklad 8.5: Hmotnost Slunce
Vypočítejte hmotnost Slunce M_S z doby oběhu Země T_Z a z poloměru její dráhy $R_{ZS} = 149{,}5 \times 10^6$ km o níž se předpokládá, že je kruhová. Jaká je oběžná rychlost Země kolem Slunce?

Příklad 8.6: Hmotnost Jupiteru
Měsíc obíhá kolem Země po eliptické trajektorii s velkou poloosou $a_M = 384\,400$ km s periodou[3] $T_M = 27{,}32$ dne. Největší měsíc Jupiteru (a současně celé sluneční soustavy) Ganymed se pohy buje po trajektorii s velkou poloosou $a_G = 1070\,000$ km s periodou $T_G = 7{,}15$ dne. Kolikrát větší je hmotnost Jupiteru oproti Zemi?

Příklad 8.7: Svislý vrh do velké výšky
Do jaké výšky h vystoupí těleso vrhnuté svisle vzhůru z povrchu Země rychlostí o velikosti v_0? Jaká musí být tato rychlost, aby těleso již nedopadlo zpět? Odpor vzduchu zanedbejte.

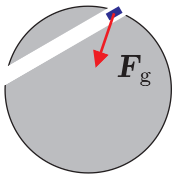
[3] Jedná se o tzv. siderickou periodu, tedy vzhledem ke hvězdám. Synodická perioda (od novu k novu) trvá 29,53 dne.

Příklad 8.8: Nulová gravitace mezi Měsícem a Zemí
V jaké vzdálenosti od středu Země je na spojnici Země-Měsíc velikost gravitační síly působící na těleso o hmotnosti m nulová? Vzdálenost Země-Měsíc je d, pro hmotnost měsíce použijte $M_{\mathrm{M}} = M_{\mathrm{Z}}/81$.

Příklad 8.9: Pokusy na Zemi a Měsíci
Vypočítejte, kolikrát výše vyskočíte na Měsíci oproti Zemi za předpokladu, že na obou tělesech jste schopni vyvinout stejný impuls síly. Vypočítejte, kolikrát rychleji jdou kyvadlové hodiny na Měsíci oproti stejným hodinám na Zemi.

Příklad 8.10: Skok do nekonečna
Řekněme, že průměrně zdatný člověk vyskočí na povrchu Země do výšky $h = 1\,\mathrm{m}$. Představme si dále, že tento člověk stojí na povrchu planetky, jejíž hustota je stejná, jako je průměrná hustota Země. Jaký poloměr by planetka musela mít, aby se tento člověk výskokem vzhůru vymanil z jejího gravitačního vlivu? Předpokládejme přitom, že na Zemi i planetce je schopen při výskoku vyvinout stejný impuls síly.

Příklad 8.11: Vlak poháněný gravitací

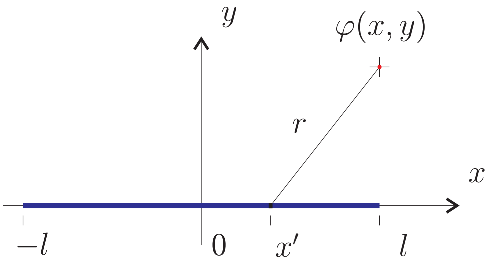


Doprava na velké vzdálenosti by v budoucnu mohla být vyřešena následujícím způsobem. Mezi vzdálenými místy na Zemi vykopeme přímý tunel, umístíme do něj vlak a jeho pohánění svěříme gravitaci. Pokud bychom mohli zanedbat tření a odpor prostředí, jak dlouho by trvala cesta od jednoho konce tunelu ke druhému? Uvažujte, že Země je homogenní.
Nápověda: Při řešení využijte skutečnosti, že na vlak bude gravitačně působit pouze hmota v myšlené kouli o poloměru vzdálenosti vlaku od středu Země.

Příklad 8.12: Stejná gravitace nad i pod povrchem Země
Najděte takovou vzdálenost h od povrchu Země, ve které je velikost intenzity gravitačního pole nad i pod zemským povrchem stejná. Předpokládejte přitom, že je Země homogenní.

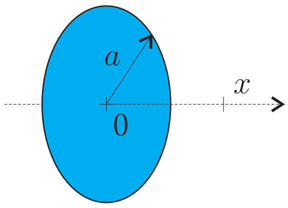
Příklad 8.13: Volný pád na Slunce (matematicky náročnější)
Kosmická loď se nachází ve vzdálenosti $R = R_{\mathrm{ZS}} = 149{,}5 \times 10^6\,\mathrm{km}$ od Slunce, je vzhledem k němu v klidu a kosmonauti provádí fyzikální experiment. Přitom omylem vypustí do volného prostoru veškeré palivo pro pohon lodi. Vypočítejte, jak dlouho bude padat kosmická loď na Slunce. Poloměr Slunce je $R_{\mathrm{S}} = 696\,000\,\mathrm{km}$.

Příklad 8.14: Potenciál a intenzita gravitačního pole v okolí tyče



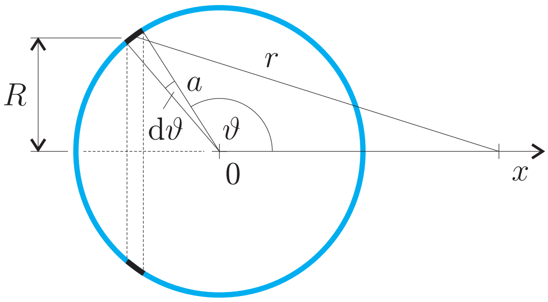
Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole v okolí tenké homogenní tyče délky $2l$ a hmotnosti M.

Příklad 8.15: Potenciál a intenzita gravitačního pole v ose kruhové desky



Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti $x > 0$ v ose homogenní tenké kruhové desky o poloměru a a hmotnosti M.

Příklad 8.16: Potenciál a intenzita gravitačního pole uvnitř a vně kulové slupky



Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti x od středu homogenní kulové slupky o poloměru a a hmotnosti M.

9. Speciální teorie relativity

Příklad 9.1: Mion
Miony[4] na Zemi vznikají interakcí kosmického záření s molekulami vrchní vrstvy atmosféry. Střední doba života mionu ve vztažné soustavě spojené s ním je $\tau = 2,2\,\mu$s. Vypočítejte, jakou minimální rychlostí se mion pohybuje, jestliže jej jsme schopni detekovat na zemském povrchu.

Příklad 9.2: Raketa
Raketa se od Země vzdaluje rychlostí $v = 0,5\,$c směrem ke vzdálenému cíli. Nedočkavá posádka vystřelí směrem k cíli menší průzkumné plavidlo rychlostí $u' = 0,5\,c$ (vzhledem k raketě). Jakou rychlostí u se pohybuje průzkumné plavidlo vzhledem k Zemi?

Příklad 9.3: Dvě rakety
K Zemi se blíží od Proximy Centauri raketa A rychlostí $u_1 = 0,9\,$c, z opačného směru pak raketa B rychlostí $u_2 = 0,8\,$c. Jakou rychlostí u se pohybují obě rakety vůči sobě?

Příklad 9.4: Světelné záblesky z rakety
Raketa se vzdaluje od Země rychlostí $v = 0,866\,c$. Posádka vyšle zpět k Zemi dva světelné záblesky s časovým odstupem $\Delta t' = 4\,$s (měřeno hodinami v raketě). S jakým časovým odstupem $\Delta\tau$ tyto signály zachytí v řídícím středisku na Zemi (Měřeno hodinami na Zemi)?

Příklad 9.5: Relativistický pirát silnic
Drzý řidič projel křižovatkou na červenou. Policistovi, který jej zastavil, tvrdí, že prostě jel trochu rychleji a červenou barvu semaforu tedy viděl jako zelenou. Jakou rychlostí by musel jet, aby červené světlo o vlnové délce $\lambda_{č} = 700\,$nm viděl jako světlo zelené o vlnové délce $\lambda_z = 550\,$nm?
Nápověda: Vlnová délka je vzdálenost kterou vlna (v našem případě světlo) urazí během jedné periody.

Příklad 9.6: Hustota
Jakou rychlostí se musí vůči pozorovateli pohybovat těleso, aby jeho hustota byla dvojnásobná oproti hustotě klidové?

Příklad 9.7: Nabitá částice v elektrickém poli
Na částici s nábojem q působí v elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E}$ síla, pro kterou platí $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$. Vypočítejte časovou závislost rychlosti a polohy částice o klidové hmotnosti m_0 umístěné v elektrickém poli o intenzitě $\boldsymbol{E} = (E, 0, 0)$, jestliže v čase $t = 0$ jsou její

[4] Mion patří do rodiny leptonů, je to částice podobná elektronu, má oproti němu 207× větší hmotnost.

polohový vektor a rychlost nulové. Výpočet proveďte nerelativisticky i relativisticky a výsledky porovnejte.

Příklad 9.8: Kinetická energie rovná klidové

Jakou rychlostí se musí pohybovat v dané vztažné soustavě částice, aby její kinetická energie a energie klidová si byly navzájem rovny?

Příklad 9.9: Průlet galaxií

Vypočítejte, jakou dobu trvá průlet protonu kosmického naší Galaxií vzhledem ke vztažné soustavě spojené s galaxií a vzhledem ke vztažné soustavě spojené s protonem, jestliže jeho energie $E = 10^{10}\,\mathrm{GeV}$. Klidová energie protonu $E_0 = 938\,\mathrm{MeV}$, průměr Galaxie $d =$ 100 000 světelných let.

Příklad 9.10: Jaderná fúze

V roce 1970 spotřebovalo lidstvo energii ve výši $E = 5,5 \times 10^{13}\,\mathrm{kWh}$. Fúzní reaktor v budoucnu může produkovat energii slučováním jader deuteria na jádra hélia

$$^{2}\mathrm{D} + {}^{2}\mathrm{D} \rightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \text{energie}.$$

Vypočítejte, kolik kg deuteria je potřeba na pokrytí roční potřeby energie z roku 1970, jestliže pro klidové hmotnosti deuteria a hélia platí $m_{0\mathrm{D}} = 2,01363\,\mathrm{amu}$, $m_{0\mathrm{He}} = 4,00260\,\mathrm{amu}$, kde pro atomovou hmotnostní jednotku platí $1\,\mathrm{amu} = 1,6605402 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$.

Příklad 9.11: Rozpad pionu

Pion[7] π^- nacházející se v klidu se rozpadl na mion μ^- a mionové antineutrino $\overline{\nu}_\mu$. Vypočítejte energii mionu a neutrina, jestliže pro klidové energie pionu a mionu platí $E_{\pi 0} = 139,6\,\mathrm{MeV}$, $E_{\mu 0} = 105,7\,\mathrm{MeV}$ a klidovou hmotnost antineutrina můžeme zanedbat. Vypočítejte rychlost mionu.

Příklad 9.12: Srážka částic

Částice o klidové hmotnosti m_0 pohybující se rychlostí $v = 4c/5$ se dokonale nepružně srazí s částicí o stejné hmotnosti m_0. Jakou klidovou hmotnost M_0 má nově vzniklá částice? Jakou rychlostí u se pohybuje?

[7] Pion π^- ($\pi-$mezon) je částice skládající se z kvarku d a antikvarku $\overline{u}$. Z kvarků jsou složeny i nám důvěrně známě baryony jako proton (kvarky udu) a neutron (kvarky dud). Střední doba života pionu π^- je $\tau = 2,6 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}$.

10. Mechanika kapalin

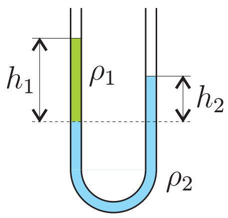
Příklad 10.1: Ledovec ve sklenici vody
Ve sklenici tvaru válce o poloměru $R = 2\,\mathrm{cm}$ plave ve vodě kostka ledu o objemu $V = 1\,\mathrm{cm}^3$. Vypočítejte, jaká část objemu ledu je nad hladinou a jaká pod hladinou. Určete dále, o kolik se zvedne hladina vody ve sklenici, jestliže led roztaje. Pro hustotu vody a ledu platí $\rho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $\rho_\mathrm{l} = 920\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Příklad 10.2: Plovoucí mosazná koule
Jakou tloušťku stěny h musí mít mosazná koule o poloměru $R = 10\,\mathrm{cm}$, aby plavala na hladině vody? Pro hustotu mosazi a vody platí $\rho_\mathrm{m} = 8\,500\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $\rho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Příklad 10.3: Archimedes
Bronzová[8] krychle má tíhu $F_\mathrm{g} = 6\,300\,\mathrm{N}$, pokud ji ponoříme do vody, tak její tíha je $F_\mathrm{gv} = 5\,540\,\mathrm{N}$. Vypočítejte, kolik procent její hmotnosti je tvořeno mědí a kolik cínem, víte li, že pro hustotu vody, mědi a cínu platí $\rho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $\rho_\mathrm{m} = 8\,800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, $\rho_\mathrm{c} = 7\,300\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Vztlak vzduchu zanedbejte.

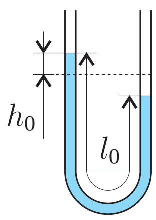
Příklad 10.4: vážení na rovnoramenných vahách
Předmět hustoty ρ byl vyvážen na rovnoramenných vahách závažím o hmotnosti m_z a hustotě ρ_z. Jaká je hmotnost předmětu m, pokud hustota vzduchu v okamžiku a místě měření byla ρ_v?

Příklad 10.5: Dvě kapaliny v u-trubici



V u-trubici jsou nality dvě kapaliny, které se navzájem nemísí. Vypočítejte poměr jejich hustot z poměru výšek hladin h_1 a h_2.

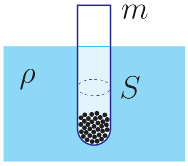
Příklad 10.6: Kmity kapaliny v u-trubici



Do svisle postavené u-trubice poloměru r je nalita ideální kapalina, délka jejíhož sloupce (viz obrázek) je l_0 a platí $l_0 \gg r$. Díky poklesu tlaku v levém rameni v něm vystoupí hladina kapaliny do výšky h_0 oproti rovnovážné hodnotě a poté se tlaky v obou ramenech opět vyrovnají. Jaká bude perioda kmitů kapaliny v u-trubici?

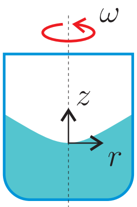
[8] Bronz je slitina mědi a cínu.

Příklad 10.7: Zkumavka



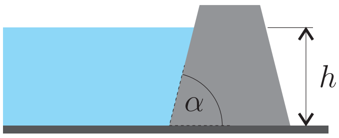
V ideální kapalině o hustotě ρ plave zkumavka hmotnosti m, která má průřez S. Jaká bude perioda kmitů zkumavky, pokud ji vertikálně vychýlíme z rovnovážné polohy a pustíme?

Příklad 10.8: Rotující nádoba



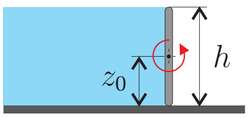
Nádoba naplněná kapalinou rotuje kolem své svislé osy úhlovou rychlostí ω. Vypočítejte, podle jaké funkce $z = z(r)$ se vytvaruje hladina kapaliny po dosažení ustáleného stavu.

Příklad 10.9: Přehradní hráz



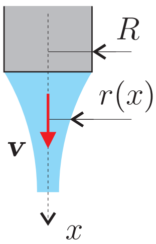
U přehradní hráze délky l tvaru lichoběžníkového hranolu s úhlem sklonu stěn α sahá voda do výšky h. Vypočítejte, jakou silou působí voda na přehradní hráz.

Příklad 10.10: Stavidlo



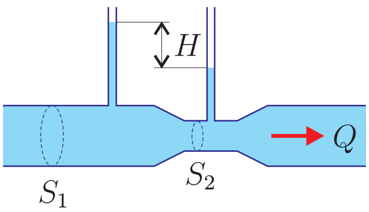
Stavidlo vodní nádrže je tvořeno deskou výšky h a šířky l, přičemž voda dosahuje až k jeho horní hraně. Vypočítejte, jakým momentem síly se snaží voda stavidlem pootočit, pokud je upevněno v ose ležící ve výšce $z_0 = h/2$. V jaké výšce by muselo být stavidlo upevněno, aby na něj voda působila nulovým momentem síly?

Příklad 10.11: Vodovod



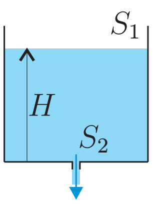
Z vodovodu vytéká kruhovým otvorem o poloměru R voda počáteční rychlostí o velikosti v_0. Vypočítejte, jaká je závislost poloměru vodního proudu na vzdálenosti x od vodovodu. Vodu považujte za nestlačitelnou kapalinu se zanedbatelnou viskozitou.

Příklad 10.12: Venturiho trubice



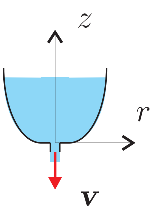
Venturiho trubice, viz obrázek, je zařízení, pomocí něhož lze určit objemový průtok Q kapaliny z rozdílu výšek hladin H v trubicích připojených k úsekům potrubí s různými průřezy (S_1 a S_2). Najděte vzorec pro výpočet objemového průtoku $Q = Q(H)$.

Příklad 10.13: Za jak dlouho vyteče kapalina z nádoby?



Nádoba konstantního průřezu S_1 je naplněná ideální kapalinou do výšky H. Za jak dlouho vyteče kapalina otvorem o průřezu S_2 vyvrtaným ve dně nádoby? Přitom platí, že $S_1 \gg S_2$.

Příklad 10.14: Vodní hodiny

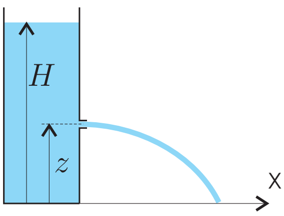


Vodní hodiny se používaly v Egyptě již před více než 3 700 lety. Jedná se o osově symetrickou nádobu naplněnou vodou, která z ní vytéká malým otvorem ve dně. Nádoba musí mít takový tvar, aby hladina klesala rovnoměrně (konstantní rychlostí), z její výšky se odečítá čas. Najděte závislost poloměru této nádoby na výšce ode dna $r(z)$. Předpokládejte přitom, že plocha výpustního otvoru S je výrazně menší než plocha hladiny a vodu považujte za dokonalou kapalinu.

Příklad 10.15: Výška hladiny

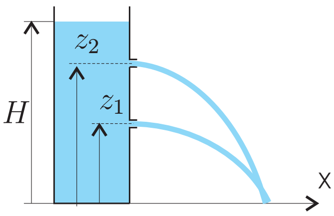
Do válcové nádoby poloměru $r = 5\,\mathrm{cm}$ a výšky $H = 20\,\mathrm{cm}$ stojící na podstavě přitéká z vodovodu voda s objemovým průtokem $Q = 140\,\mathrm{cm^3\,s^{-1}}$. V jaké výšce h se ustálí hladina, pokud ve dně nádoby je otvor o ploše $S = 1\,\mathrm{cm^2}$?

Příklad 10.16: Z jaké výšky dostříkne kapalina nejdále?



Nádoba je naplněna ideální kapalinou až do výšky H. Do jaké výšky z ode dna nádoby musíme vyvrtat ve svislé stěně malý otvor, aby kapalina dostříkla nejdále? Jaká je tato maximální vzdálenost? Předpokládejte, že Otvor je tak malý, že jeho plochu můžeme oproti ploše hladiny zcela zanedbat.

Příklad 10.17: Do stejné vzdálenosti

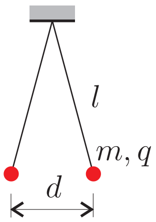


Do svislé stěny nádoby jsou vyvrtány dva malé otvory ve výškách z_1 a z_2 ode dna. V jaké výšce H musí být hladina ideální kapaliny, aby tato z obou otvorů dostříkla do stejné vzdálenosti? Jaká je tato vzdálenost?

11. Elektrostatické pole

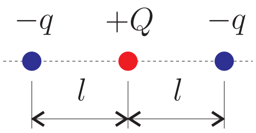
Příklad 11.1: Kdo je silnější, Coulomb nebo Newton?
Vypočítejte poměr velikosti gravitační a elektrostatické síly. kterou na sebe působí dva elektrony.

Příklad 11.2: Nabité kuličky na provázku



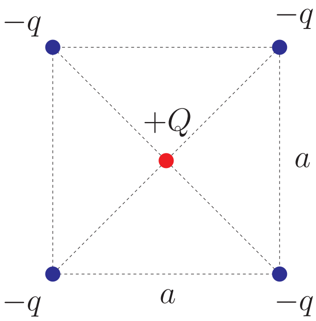
Dvě malé stejně nabité kuličky o stejných hmotnostech $m = 0{,}5\,\mathrm{g}$ jsou zavěšeny ve vzduchu v jednom bodě na nehmotných vláknech délky $l = 1\,\mathrm{m}$. Jaký je jejich náboj q, jestliže pro jejich vzdálenost zapříčiněnou elektrostatickým odpuzováním platí $d = 5\,\mathrm{cm}$?

Příklad 11.3: Tři náboje



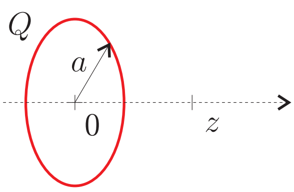
V jakém poměru musí být velikosti bodových nábojů q a Q opačného znaménka volně umístěných symetricky v jedné přímce, aby tato konfigurace byla v rovnováze? Je tato rovnováha stabilní, nebo labilní? **Nápověda:** Stabilitu vyšetříte tak, že posunete jeden z nábojů z rovnovážné polohy doleva nebo doprava o malou vzdálenost Δx a zjistíte, zda má výsledná síla tendenci tuto vzdálenost zvětšovat (labilní rovnováha), nebo zmenšovat (stabilní rovnováha).

Příklad 11.4: Pět nábojů



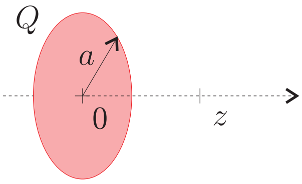
Čtyři bodové náboje o velikosti q jsou volně umístěny ve vrcholech čtverce o straně a. Jakou velikost Q musí mít náboj opačného znaménka umístěný ve středu čtverce, aby celá konfigurace byla v rovnováze?

Příklad 11.5: Potenciál a intenzita elektrického pole v ose kruhové smyčky



Vypočítejte potenciál a intenzitu elektrického pole v ose kruhové smyčky o poloměru a. V jaké vzdálenosti je na ose smyčky velikost intenzity elektrického pole maximální? Smyčka je rovnoměrně nabita nábojem Q a je umístěna ve vzduchu.

Příklad 11.6: Potenciál a intenzita elektrického pole v ose kruhové desky



Vypočítejte potenciál a intenzitu elektrického pole v ose tenké kruhové desky o poloměru a, jestliže hustota plošného náboje desky σ je konstantní. Jak závisí intenzita elektrického pole na vzdálenosti od desky pro $z \ll a$?

Příklad 11.7: Potenciál a intenzita elektrického pole v okolí nabité niti

Vypočítejte potenciál a intenzitu elektrického pole ve vzdálenosti a od nekonečně dlouhé niti rovnoměrně nabité nábojem o lineární hustotě τ. Permitivita prostředí $\varepsilon = \varepsilon_0$.

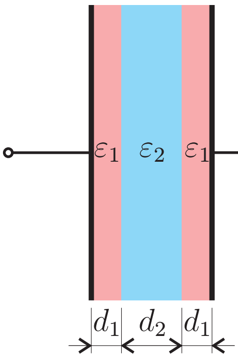
Příklad 11.8: Nevodivá nabitá koule

Vypočítejte intenzitu a potenciál elektrického pole uvnitř a vně nevodivé nabité koule o poloměru R, která je rovnoměrně nabita nábojem Q (objemová hustota náboje ρ je konstantní). Pro permitivitu koule i jejího okolí platí $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Příklad 11.9: Vodivá nabitá koule

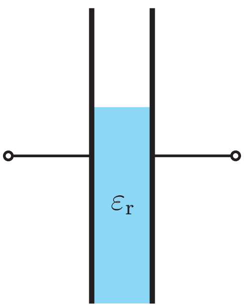
Vypočítejte intenzitu a potenciál elektrického pole uvnitř a vně vodivé koule o poloměru R, která je nabita nábojem Q. Pro permitivitu koule i jejího okolí platí $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Příklad 11.10: Deskový kondenzátor 1



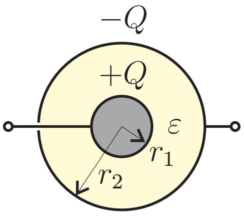
Plocha polepů deskového kondenzátoru $S = 200\,\mathrm{cm}^2$. Mezi polepy je sklo tloušťky $d_2 = 1\,\mathrm{mm}$ s permitivitou $\varepsilon_2 = 7\varepsilon_0$. Každá ze stěn skleněné výplně je opatřena parafinovou vrstvou o tloušťce $d_1 = 0,2\,\mathrm{mm}$ s permitivitou $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_0$. Jaká je kapacita tohoto kondenzátoru?

Příklad 11.11: Deskový kondenzátor 2



Deskový kondenzátor má elektrody plochy S, jejichž vzájemná vzdálenost je d. Část plochy S_d mezi elektrodami je vyplněna dielektrikem s relativní premitivitou ε_r. Jaká je kapacita tohoto kondenzátoru?

Příklad 11.12: Kulový kondenzátor

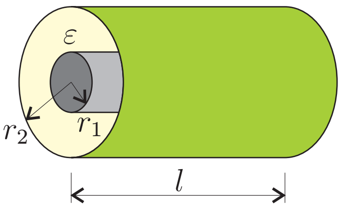


Kulový kondenzátor je tvořen dvěma elektrodami tvaru soustředných kulových ploch o poloměrech r_1 a r_2, mezi nimiž je výplň z materiálu s permitivitou ε. Vypočítejte kapacitu tohoto kondenzátoru.

Příklad 11.13: Kapacita Zeměkoule

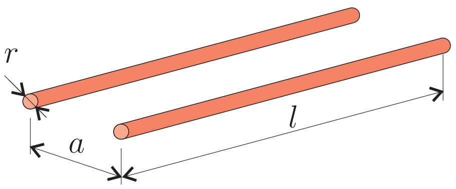
Jakou kapacitu má Zeměkoule, jestliže ji můžeme pokládat za vodivou kouli o poloměru $R_Z = 6\,378\,\mathrm{km}$?

Příklad 11.14: Válcový kondenzátor



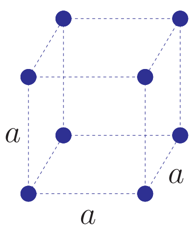
Válcový kondenzátor je tvořen dvěma souosými elektrodami tvaru pláště válce o poloměrech r_1, r_2 a délce l. Prostor mezi elektrodami je vyplněn materiálem o permitivitě ε. Vypočítejte kapacitu tohoto kondenzátoru.

Příklad 11.15: Kapacita dvojlinky



Vypočítejte kapacitu dvou rovnoběžných vodičů poloměru r a délky l, pro vzdálenost jejichž os platí $a \gg r$ a $l \gg a$.

Příklad 11.16: Krychle



Jak velkou práci je třeba vynaložit na umístění 8 stejných nábojů q do rohů myšlené krychle o hraně a? Předpokládejte, že náboje je třeba přemístit z velké vzdálenosti a prostředí má permitivitu ε_0.

Příklad 11.17: Poloměr elektronu

Víme, že pro hmotnost elektronu platí $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ a pro jeho náboj $q_e = -1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$. Předpokládejte, že elektron je kulička s veškerým nábojem rovnoměrně rozmístěným na jejím povrchu s nulovou „mechanickou“ hmotností. Jaký poloměr by tato kulička musela mít, aby energie pole vytvářeného elektronem měla hmotnost rovnou hmotnosti m_e?

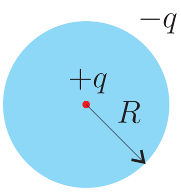
Příklad 11.18: Deskový kondenzátor s a bez dielektrické výplně

Deskový kondenzátor má elektrody s plochou $S = 100\,\mathrm{cm}^2$ vzdálené $d = 1\,\mathrm{mm}$, mezi nimiž je umístěna dielektrická výplň s relativní permitivitou $\varepsilon_\mathrm{r} = 5$. Mezi elektrodami kondenzátoru, který není zapojen do žádného obvodu, je napětí $U_0 = 1000\,\mathrm{V}$. Jak se změní toto napětí, když dielektrikum vytáhneme z kondenzátoru ven? Jakou práci musíme na vytažení dielektrika vynaložit?

Příklad 11.19: Síla, jíž se přitahují desky deskového kondenzátoru

Deskový kondenzátor má elektrody s plochou $S = 100\,\mathrm{cm}^2$, mezi nimiž je vzduchová vrstva tloušťky $d = 1\,\mathrm{mm}$. Jak velkou silou se desky přitahují, jestliže je kondenzátor nabit na rozdíl potenciálů $U = 1000\,\mathrm{V}$?

Příklad 11.20: Dipólový moment atomu v elektrostatickém poli



Předpokládejme jednoduchý model atomu, kde kladný bodový náboj $+q$ je obklopen záporným nábojem $-q$ spojitě rovnoměrně rozloženým v kouli o poloměru R. Vypočítejte dipólový moment takovéhoto „atomu“, jestliže se ocitne v homogenním elektrostatickém poli s intenzitou $\boldsymbol{E}_0$.

Příklad 11.21: Vakuová dioda

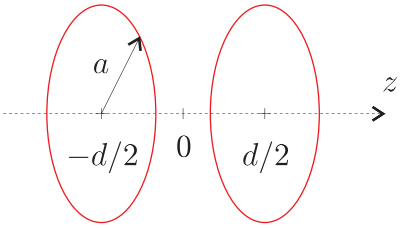
Vakuová dioda (elektronka) elektrody tvaru souosých válců, přičemž vnitřní (katoda) má poloměr $a = 0,5\,\mathrm{mm}$ a vnější (anoda) má poloměr $b = 4,5\,\mathrm{mm}$. Mezi elektrodami je potenciálový rozdíl $U = 300\,\mathrm{V}$. Z katody je emitován elektron, jehož počáteční rychlost může být považována za nulovou. Jakou rychlost má elektron v polovině dráhy k anodě a při dopadu na ni? Pro hmotnost elektronu platí $m_\mathrm{e} = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

12. Magnetostatické pole

Příklad 12.1: Magnetické pole v okolí přímého proudovodiče
Vypočítejte magnetickou indukci ve vzdálenosti a od nekonečně dlouhého přímého vodiče protékaného proudem I.

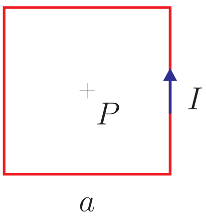
Příklad 12.2: Magnetické pole v ose kruhové smyčky
Vypočítejte magnetickou indukci v ose kruhové smyčky o poloměru a, kterou protéká proud I.

Příklad 12.3: Helmholtzovy cívky



V jaké vzdálenosti d od sebe musí být dvě souosé kruhové smyčky stejného poloměru a protékané stejným směrem stejným proudem I, aby magnetická indukce na ose mezi cívkami byla téměř konstantní? Jaká je velikost této indukce?
Nápověda: Pro velikost vektoru magnetické indukce uprostřed mezi cívkami musí platit $\mathrm{d}^2B/\mathrm{d}z^2 = 0$.

Příklad 12.4: Magnetické pole ve středu čtvercové smyčky



Vypočtěte magnetickou indukci uprostřed čtvercové smyčky o straně a protékané proudem I.

Příklad 12.5: Magnetické pole uvnitř a vně přímého proudovodiče
Vypočítejte magnetickou indukci uvnitř a vně nekonečně dlouhého přímého proudovodiče kruhového průřezu o poloměru R, protékaného proudem I. Předpokládejte přitom, že proudová hustota ve vodiči je konstantní a pro permeabilitu vodiče platí $\mu = \mu_0$.

Příklad 12.6: Nabitá částice v homogenním magnetickém poli
Najděte trajektorii částice o hmotnosti m a náboji q, která se pohybuje v homogenním magnetickém poli, pro jehož magnetickou indukci platí $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_0)$. Pro vektor rychlosti částice v čase $t = 0$ platí $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$.

Příklad 12.7: Nabitá částice ve zkříženém elektrickém a magnetickém poli
Najděte časovou závislost polohového vektoru a rychlosti částice o hmotnosti m a náboji q ve zkříženém homogenním elektrickém a magnetickém poli s magnetickou indukcí $\boldsymbol{B} =$

$(0, 0, B_0)$ a intenzitou elektrického pole $E = (E_0, 0, 0)$, jestliže v čase $t = 0$ platí $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$ a $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}$.

13. Nové kousky

Příklad 13.1: Brzdění silou úměrnou druhé mocnině rychlosti
Na jaké dráze se zastaví kulička o hmotnosti m, která se pohybuje po dokonale hladké vodorovné ploše, působí na ni pouze síla

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}} = -k|\boldsymbol{v}|\boldsymbol{v}, \qquad k > 0$$

a v určitém čase je velikost její rychlosti v_0?

Příklad 13.2: Na nádraží
Výpravčí stojí na peróně na začátku prvního vagónu stojícího vlaku. Vlak se dá do rovnoměrně zrychleného pohybu takovým způsobem, že první vagón míjí výpravčího po dobu Δt_1. Jakou dobu Δt_n míjí výpravčího $n-$tý vagón?

Příklad 13.3: Potenciál a intenzita gravitačního pole v ose tyče
Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole v ose tenké tyče délky $2l$ a hmotnosti M ve vzdálenosti $x > l$ od jejího středu.

Příklad 13.4: Potenciál a intenzita gravitačního pole kolmo na osu tyče
Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti $y > 0$ od středu tenké tyče kolmo na její osu. Tyč má délku $2l$ a hmotnosti M.

Příklad 13.5: Potenciál a intenzita gravitačního pole v okolí hmotné přímky
Vypočítejte potenciál a intenzitu gravitačního pole ve vzdálenosti $y > 0$ od (nekonečně dlouhé) přímky o délkové hustotě (= hmotnosti vztažené na jednotku délky) μ.

14. Výsledky

1. Rozměrová analýza

[**1.1**] Rozměrovou analýzou určíme periodu $T = k\sqrt{l/g}$, kde k je bezrozměrná konstanta, jejíž hodnotu rozměrovou analýzou nelze určit. Řešením pohybové rovnice matematického kyvadla bychom zjistili, že $k = 2\pi$. Již z rozměrové analýzy plyne, že perioda matematického kyvadla nezávisí na jeho hmotnosti. ■

[**1.2**] Pro rychlost sypání písku v přesýpacích hodinách platí platí

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = k\rho g^{1/2} S^{5/4},$$

kde k je bezrozměrný koeficient, který pomocí rozměrové analýzy určit nejde. ■

[**1.3**] Pro tlak uvnitř hvězdy (planety) dostaneme

$$p \propto \varkappa \frac{M^2}{R^4},$$

konkrétně pro Slunce $p_\mathrm{S} \approx 10^{15}\,\mathrm{Pa}$, pro Zemi $p_\mathrm{Z} \approx 10^{12}\,\mathrm{Pa}$. Současné odhady tlaku v nitru Slunce a Země jsou $p_\mathrm{S} = 2 \times 10^7\,\mathrm{GPa}$, $p_\mathrm{Z} = 3,5 \times 10^5\,\mathrm{MPa}$, odkud je vidět, že odhad pomocí rozměrové analýzy není špatný. ■

[**1.4**] Pro Planckův čas, Planckovu délku a Planckovu hmotnost postupně dostaneme

$$t_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{\varkappa\hbar}{c^5}} \approx 10^{-43}\,\mathrm{s}, \quad l_\mathrm{p} = ct_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{\varkappa\hbar}{c^3}} \approx 10^{-35}\,\mathrm{m}, \quad m_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{c\hbar}{\varkappa}} \approx 10^{-8}\,\mathrm{kg}.$$

■

[**1.5**] Vzorec pro frekvenci struny má tvar

$$f = \frac{k}{l}\sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

kde k je bezrozměrná konstanta. Vzorec odpovídá zkušenosti, že silnější („těžší“) a delší struny zní na nižší frekvenci a naopak, s rostoucím napětím frekvence struny stoupá. Řešením pohybové rovnice struny (parciální diferenciální rovnice) bychom zjistili, že $k = n/2$, kde $n = 1, 2, 3, ...$ (základní frekvence a vyšší harmonické).

■

2. Kinematika

[**2.1**] Pro poměr rychlosti jízdy autobusu c a chůze studenta v dostaneme

$$\frac{c}{v} = \frac{T_\mathrm{v} + T_\mathrm{p}}{T_\mathrm{v} - T_\mathrm{p}} = 9,$$

pro interval T autobusů potom

$$T = \frac{2T_\mathrm{v}T_\mathrm{p}}{T_\mathrm{v} + T_\mathrm{p}} = 12\,\mathrm{minut}.$$

■

[**2.2**] Automobil se v průběhu brzdění pohyboval se zrychlením

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2l_b} = -0,77\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

■

[**2.3**] Srážka nastane v čase

$$t_\mathrm{s} = \frac{v_\mathrm{r} - v_\mathrm{n} \pm \sqrt{(v_\mathrm{r} - v_\mathrm{n})^2 - 2as_0}}{a} = 20\,\mathrm{s}$$

od okamžiku, kdy strojvůdce spatří nákladní vlak. Stane se tak ve vzdálenosti

$$x_\mathrm{s} = -\frac{1}{2}at_\mathrm{s}^2 + v_\mathrm{r}t_\mathrm{s} = 400\,\mathrm{m}$$

od místa kde strojvůdce nákladní vlak spatřil, relativní rychlost vlaků při srážce je

$$v_\mathrm{s} = -at_\mathrm{s} + v_\mathrm{r} - v_\mathrm{n} = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

■

[**2.4**] Pro hledanou rychlost $\overline{v}_2$ platí

$$\overline{v}_2 = \frac{\overline{v}_1\overline{v}}{2\overline{v}_1 - \overline{v}} = 60\,\mathrm{km\,h^{-1}}.$$

Aby mohlo být dosaženo požadované průměrné rychlosti, musí platit $\overline{v}_1 > \overline{v}/2$. Pro $\overline{v}_1' = 10\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ již není možné dosáhnout plánované průměrné rychlosti $\overline{v} = 20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. ■

[**2.5**] Polohu koncového bodu táhla lze vyjádřit vztahem

$$x = R\cos\omega t + \sqrt{l^2 - R^2\sin^2\omega t} \approx l + R\cos\omega t \quad (\text{pro } l \gg R).$$

■

[**2.6**] Člověk s dopisem pošťáka doběhne pokud poběží pod úhlem

$$56^\circ\,26'\,34'' \le \alpha \le 123^\circ\,33'\,26'',$$

kde maximální a minimální úhel jsou řešeními rovnice

$$\sin\alpha = \frac{v_1 h}{v_2 s}.$$

Minimální rychlost, kterou lze pošťáka ještě doběhnout je

$$v_{2\,\mathrm{min}} = \frac{v_1 h}{s} = 2,5\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

■

[**2.7**] Vzájemnou vzdálenost $l_{\mathrm{FB}}(t)$, okamžik největšího přiblížení t_{n} a nejmenší vzájemnou vzdálenost l_{n} dostaneme jako

$$l_{\mathrm{FB}}(t) = \sqrt{(l_{\mathrm{F}} - v_{\mathrm{F}} t)^2 + v_{\mathrm{B}}^2 t^2}, \quad t_{\mathrm{n}} = \frac{l_{\mathrm{F}} v_{\mathrm{F}}}{v_{\mathrm{B}}^2 + v_{\mathrm{F}}^2}, \quad l_{\mathrm{n}} = \frac{l_{\mathrm{F}} v_{\mathrm{B}}}{\sqrt{v_{\mathrm{B}}^2 + v_{\mathrm{F}}^2}}.$$

■

[**2.8**] Pro vzájemnou vzdálenost těles platí

$$l(t) = vt\sqrt{5 - 4\cos\alpha}.$$

■

[**2.9**] Nejkratší cesta přímo po poli trvá

$$t_{\mathrm{p}} = \frac{l_{\mathrm{p}}}{v} = \frac{3\sqrt{d^2 + h^2}}{c} = 13\,\mathrm{m}\,25\,\mathrm{s}.$$

Cesta bude cyklistovi trvat nejkratší dobu, když po silnici urazí vzdálenost

$$x = d - \frac{vh}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1\,646\,\mathrm{m}$$

a dále bude pokračovat přímo k bodu B. Doba trvání cesty bude $t_{\mathrm{sp}} = 9\,\mathrm{m}\,39\,\mathrm{s}$, časová úspora tedy $\Delta t = 3\,\mathrm{m}\,46\,\mathrm{s}$. ■

[**2.10**] Pro rychlost v a polohu x bodu platí

$$v = a_0 t - \frac{a_0}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right), \qquad x = \frac{1}{2} a_0 t^2 - \frac{a_0}{k} t + \frac{a_0}{k^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt}\right).$$

■

[**2.11**] Zrychlení hmotného bodu je dáno funkcí

$$a = a_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right).$$

Pro rychlost a polohu v čase τ platí

$$v_\tau = \frac{a_0 \tau}{2} = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \qquad x_\tau = \frac{a_0 \tau^2}{3} = 1\,333,3\,\mathrm{m}.$$

■

[**2.12**] Pro složky vektoru rychlosti platí

$$v_x = -\omega A \sin \omega t, \quad v_y = \omega B \cos \omega t,$$

velikost tohoto vektoru je

$$v = |\omega| B \sqrt{1 + \frac{A^2 - B^2}{B^2} \sin^2 \omega t}, \qquad |\omega| B \le v \le |\omega| A.$$

Pro složky a velikost vektoru zrychlení dostaneme

$$a_x = -\omega^2 A \cos \omega t, \quad a_y = -\omega^2 B \sin \omega t, \quad a = \omega^2 B \sqrt{1 + \frac{A^2 - B^2}{B^2} \cos^2 \omega t}.$$

■

[**2.13**] Pro složky a velikost rychlosti nabité částice platí

$$v_x = -\omega A \sin \omega t, \quad v_y = \omega A \cos \omega t, \quad v_z = B, \quad v = \sqrt{\omega^2 A^2 + B^2}.$$

Vektor zrychlení má složky a velikost

$$a_x = -\omega^2 A \cos \omega t, \quad a_y = -\omega^2 A \sin \omega t, \quad a_z = 0, \quad a = \omega^2 A.$$

Pro tečné a normálové zrychlení dostaneme $\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{a}$, pro poloměr křivosti trajektorie potom

$$R = A + \frac{B^2}{\omega^2 A} > A.$$

■

[**2.14**] Polohový vektor kamínku má složky

$$x = R\,(\omega t - \sin \omega t)\,, \qquad z = R\,(1 - \cos \omega t)\,,$$

kde $\omega = u/R$ je úhlová rychlost otáčení kola. Pro složky vektoru rychlosti dostaneme

$$v_x = \omega R\,(1 - \cos \omega t) = u\,(1 - \cos \omega t)\,, \qquad v_z = \omega R \sin \omega t = u \sin \omega t,$$

pro velikost vektoru rychlosti potom

$$v = |u| \sqrt{2(1 - \cos \omega t)}.$$

Maximální rychlost $v_{\mathrm{max}} = 2|u|$ (když je nejvýše), minimální rychlost $v_{\mathrm{min}} = 0$ (když se dotýká země). Pro složky a velikost vektoru zrychlení platí

$$a_x = \omega^2 R \sin \omega t, \qquad a_z = \omega^2 R \cos \omega t, \qquad a = \omega^2 R = \frac{u^2}{R}.$$

■

[**2.15**] Doba průchodu kuličky žlábkem t_{p} je dána vztahem

$$t_{\mathrm{p}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \quad \text{(nezávisí na úhlu } \alpha\text{)}.$$

■

[**2.16**] Pro hloubku studny platí

$$h = c\left[t + \frac{c}{g} - \sqrt{c^2\left(\frac{1}{g} + \frac{t}{c}\right)^2 - t^2}\right] = 162,8\,\mathrm{m}.$$

■

[**2.17**] Pro délku i-tého úseku volného pádu platí

$$x_i = \frac{2i-1}{n^2}h.$$

■

[**2.18**] Doba pádu v i-tém úseku je

$$t_i = \sqrt{\frac{2h}{ng}}\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right).$$

■

[**2.19**] Předmět spadl z výšky

$$H = \frac{\left(2h + g\tau^2\right)^2}{8g\tau^2}.$$

■

[**2.20**] Pro velikost celkového, tečného a normálového zrychlení platí

$$a = g, \qquad a_{\mathrm{t}} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}, \qquad a_{\mathrm{n}} = \frac{v_0 g}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}}. \qquad t \in \left\langle 0, \sqrt{\frac{2h}{g}}\right\rangle.$$

■

[**2.21**] Lovec musí vystřelit přímo na opici pod úhlem

$$\alpha = \arctan\frac{h}{d}.$$

■

[**2.22**] Předmětem musíme mrštit pod elevačním úhlem $\alpha = \arctan 4 \approx 75^\circ\, 57'\, 50''$.

■

[**2.23**] Nebezpečnou zónu ohraničuje rotační paraboloid, který dostaneme rotací funkce

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$$

kolem osy z ■

[**2.24**] Minimální vzdálenost od útesu, kam ještě může dopadnout dělová koule (maximální vzdálenost, kde je pirátská loď ještě v bezpečí) je tedy

$$x_m = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{hv_0^2}{g} - \sqrt{\frac{h^2 v_0^4}{g^2} - h^2 d^2}} = 37,9\,\mathrm{m}.$$

■

[**2.25**] Maximální vzdálenosti na nakloněné rovině dosáhneme při šikmém vrhu pod úhlem

$$\alpha = \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

■

[**2.26**] Velikost zrychlení mouchy je

$$a = \sqrt{k^2 + \frac{k^4 t^4}{R^2}}.$$

■

[**2.27**] Pro velikost tečného a normálového zrychlení v čase $t = 2\,\mathrm{s}$ dostaneme

$$a_\mathrm{t} == 24rt = 4,8\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \qquad a_\mathrm{n} = 144rt^4 = 230,4\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

Vektor zrychlení svírá s průvodičem úhel $\alpha = 45^\circ$ v okamžiku, kdy má hmotný bod úhlovou souřadnici $\varphi_\alpha = 8/3\,\mathrm{rad}$. ■

[**2.28**] Zrychlení setrvačníku v průběhu brzdění je

$$\varepsilon = -\frac{2\pi f_0}{\tau} = -\frac{5}{3}\pi\,\mathrm{s^{-2}},$$

v průběhu brzdění vykoná

$$N = \frac{f_0 \tau}{2} = 375\,\text{otoček}.$$

■

[**2.29**] Polohu raket nejlépe vyjádříme v polárních souřadnicích. Vzdálenost raket r od středu (místa srážky) a úhly jednotlivých raket φ_i jsou

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}(a - vt), \quad \varphi_i = \varphi_{0i} + \ln\left(\frac{a}{a - vt}\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = \varphi_{0i} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}r}{a}\right),$$

kde φ_{0i} jsou jejich počáteční úhly. Okamžik srážky nastane v čase $t_s = a/v$. ■

3. Dynamika hmotného bodu

[**3.1**] Pro délku řetízků l musí platit

$$l \geq \frac{2F_\mathrm{p}a}{\sqrt{4F_\mathrm{p}^2 - m^2g^2}}.$$

■

[**3.2**] Závaží se pohybují se zrychleními

$$a_1 = -a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g,$$

velikost síly napínající vlákno je

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1 + m_2}g.$$

■

[**3.3**] Závaží se pohybují se zrychleními

$$a_1 = -2a_2 = \frac{4m_1 - 2m_2}{4m_1 + m_2}g,$$

velikost síly napínající vlákno je

$$T = \frac{3m_1m_2}{4m_1 + m_2}g.$$

■

[**3.4**] Pro zrychlení závaží platí

$$a = \frac{m_1 - m_2\left[\sin\alpha \pm \mu\cos\alpha\right]}{m_1 + m_2}g,$$

kde znaménko + volíme v případě, že druhé závaží je v klidu nebo se pohybuje po nakloněné rovině nahoru, pro velikost síly napínající vlákno platí

$$T = \frac{m_1m_2\left[1 + \sin\alpha \pm \mu\cos\alpha\right]}{m_1 + m_2}g,$$

pro výběr znaménka platí totéž. ■

[**3.5**] Předmět se po nakloněné rovině bude smýkat konstantní rychlostí, jestliže pro koeficient smykového tření bude platit

$$\mu = \tan\alpha.$$

■

[**3.6**] Zatáčkou lze beze smyku projet maximální rychlostí

$$v_\mathrm{max} = \sqrt{\frac{gR(\mu + \tan\alpha)}{1 - \mu\tan\alpha}}.$$

Pro neklopenou zatáčkou ($\alpha_1 = 0°$) je $v_{\max 1} = 123,5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, pro zatáčku s úhlem sklonu $\alpha_2 = 30°$ pak $v_{\max 2} = 214\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. ■

[**3.7**] Pro $y-$ové a $z-$ové složky hledaných veličin platí

$$a_y = a_z = 0, \quad v_y = v_z = 0, \quad y = z = 0.$$

Pro $x-$ovou složku zrychlení a rychlosti hmotného bodu platí

$$a_x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t, \qquad v_x = \frac{F_0}{\omega m}(1-\cos\omega t).$$

Maximální, minimální a průměrná rychlost nabývají hodnot

$$v_{x\max} = \frac{2F_0}{\omega m}, \qquad v_{x\min} = 0, \qquad \overline{v_x} = \frac{F_0}{\omega m}.$$

Pro $x-$ovou složku polohového vektoru potom platí

$$x = \frac{F_0}{\omega^2 m}\left(\omega t - \sin\omega t\right).$$

■

[**3.8**] Pro $\omega > \sqrt{g/R}$ pro výšku h a velikost síly F_s působící na stěnu odstředivky dostaneme

$$h = R - \frac{g}{\omega^2}, \qquad F_\mathrm{s} = m\omega^2 R,$$

pro $\omega \leq \sqrt{g/R}$ potom

$$h = 0, \qquad F_\mathrm{s} = mg,$$

■

[**3.9**] Polohu konce lana a jeho rychlost lze popsat pomocí vztahů

$$x(t) = l_0\cosh\sqrt{\frac{g}{l}}t, \qquad v(t) = l_0\sqrt{\frac{g}{l}}\sinh\sqrt{\frac{g}{l}}t.$$

■

[**3.10**] Rychlost dopadu parašutisty na zem je

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}},$$

tato rychlost se číselně rovná: při otevřeném padáku $v_\mathrm{o} = 4,4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ a při neotevřeném padáku pak $v_\mathrm{n} = 36\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Těmto rychlostem odpovídají (při zanedbání odporu vzduchu) výšky $h_\mathrm{o} = 1\,\mathrm{m}$, $h_\mathrm{n} = 67\,\mathrm{m}$. Závislost rychlosti parašutisty na čase lze vyjádřit vzorcem

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho S}}\tanh\sqrt{\frac{C\rho S g}{2m}}t.$$

■

[**3.11**] Pro rychlost kuličky platí

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

■

[**3.12**] Kulička se zastaví na dráze

$$s = \frac{mv_0}{k}.$$

■

[**3.13**] Malá kulička se od povrchu velké koule odlepí ve vertikální vzdálenosti od vršku

$$h = \frac{r}{3},$$

po povrchy koule přitom urazí vzdálenost

$$s = r \arccos \frac{2}{3}.$$

■

[**3.14**] Artista se musí spustit z výšky

$$h \geq \frac{5}{2}r.$$

■

[**3.15**] Pro velikost rychlosti houpačky v závislosti na úhlu vychýlení platí

$$v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\varphi_0)},$$

maximální hodnota je dosažena pří $\varphi = 0$ a činí

$$v_{\max} = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi_0)} = 2\sqrt{gl}\left|\sin\frac{\varphi_0}{2}\right|.$$

Pro velikost síly napínající závěs a její maximální hodnotu (opět pro $\varphi = 0$) platí

$$T = mg(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0), \qquad T_{\max} = mg(3 - 2\cos\varphi_0).$$

■

[**3.16**] Prak vymrští kámen s počáteční rychlostí o velikosti

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}(\alpha - 1)l.$$

■

[**3.17**] Po uvolnění pružiny bude kulička vystřelena do výšky

$$h = \frac{1}{2}\frac{s_1^2}{\Delta s} = 5,62\,\mathrm{m}.$$

■

[**3.18**] Koeficient smykového tření mezi sáňkami a sněhem je

$$\mu = \frac{s_\mathrm{k}\sin\alpha}{s_\mathrm{r} + s_\mathrm{k}\cos\alpha}.$$

■

[**3.19**] Řidič asi pokutu dostane, neboť jel rychlostí

$$v = \sqrt{2\mu g l} = 70,4\,\mathrm{km\,h^{-1}}.$$

■

[**3.20**] Střela z kvádru vyletí rychlostí

$$v' = v\sqrt{1 - \frac{h'}{h}} = 282,8\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

■

[**3.21**] Na vytažení kabelu na střechu je třeba vykonat práci

$$A = \frac{mgl}{2} = 2943\,\mathrm{J}.$$

■

[**3.22**] Aby se provázek dal právě do pohybu, musí ze stolu viset jeho část délky

$$x = \frac{\mu l}{1+\mu},$$

při jeho stažení ze stolu vykoná tíhová síla práci

$$A = \frac{\mu m g l}{2(1+\mu)^2}.$$

■

[**3.23**] Pro délku hlavně l, velikost působící síly F a vykonanou práci platí

$$l = \frac{1}{2}v\tau = 2\,\mathrm{m}, \qquad F = m\frac{v}{\tau} = 1,5\times 10^6\,\mathrm{N}, \qquad A = \frac{1}{2}mv^2 = 3\times 10^6\,\mathrm{J}.$$

■

[**3.24**] Pro velikost maximální síly působící během úderu na předmět platí

$$F_\mathrm{max} = \frac{2mv}{\tau} = 300\,\mathrm{N}.$$

■

[**3.25**] Na zpěváka působí síla o velikosti

$$\overline{F} = \frac{mv}{\Delta t} = \frac{0,1 \cdot 10}{0,1} = 10\,\mathrm{N}.$$

■

[**3.26**] Kulička se vychýlí na východ o vzdálenost

$$x_\mathrm{d} = \frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \cos\varphi.$$

Číselné hodnoty:

budova	h	φ	x_d
mrakodrap Tchaj-pej 101	508 m	25°	22,7 cm
Eiffelova věž	300 m	48°	7,6 cm
Petřínská rozhledna	60 m	50°	6,5 mm

■

[**3.27**] U pravého břehu bude hladina oproti levému převýšena o

$$\Delta h = d \tan\beta = \frac{2v\omega d \sin\varphi}{g} \approx 15\,\mathrm{mm}.$$

■

[**3.28**] Pro koeficient smykového tření mezi deskou a závažím platí

$$\mu = \frac{4\pi^2 x_0}{gT^2} = 0,08.$$

■

[**3.29**] Na závaží působí maximální síla o velikosti

$$F_\mathrm{max} = \frac{4\pi^2 m z_0}{T^2} + mg = 29,1\,\mathrm{N}.$$

Na desce bude v klidu ležet, dokud amplituda kmitů nedosáhne hodnoty

$$z_\mathrm{m} = \frac{gT^2}{4\pi^2} = 6,2\,\mathrm{cm}.$$

■

[**3.30**] Těleso zavěšené na pružině bude vykonávat harmonické kmity, pro jejichž periodu, amplitudu rychlosti a zrychlení platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta y_0}{g}} = 0,396\,\mathrm{s}, \quad v_0 = \Delta y\sqrt{\frac{g}{\Delta y_0}} = 0,317\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad a_0 = g\frac{\Delta y}{\Delta y_0} = 5,03\,\mathrm{m\,s^{-2}}.$$

■

[**3.31**] Pro periodu T_s s pružinami zapojenými za sebe a T_p s pružinami zapojenými vedle sebe platí
$$T_\mathrm{s} = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}, \qquad T_\mathrm{p} = \frac{T_1 T_2}{\sqrt{T_1^2 + T_2^2}}.$$

■

[**3.32**] Pružné lano má maximální délku
$$l = l_0 + \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2kl_0}{mg}}\right).$$

■

4. Lagrangeovy rovnice II. druhu

[**4.1**] Pohybové rovnice dvojitého kyvadla můžeme napsat ve tvaru
$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{\mu}{k}\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{\mu}{k}\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \omega_{01}^2 \sin\varphi_1 = 0,$$
$$\ddot{\varphi}_2 + k\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) - k\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \omega_{02}^2 \sin\varphi_2 = 0,$$
kde
$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad k = \frac{l_1}{l_2}, \quad \omega_{01} = \sqrt{\frac{g}{l_1}}, \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{g}{l_2}}.$$

■

[**4.2**] Pohybová rovnice má tvar
$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = \omega^2 \frac{r}{l}\cos(\varphi - \omega t), \quad \text{kde} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

■

[**4.3**] Pohybové rovnice závaží na pružině mají tvar
$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi &= -\frac{2}{l}\dot{l}\dot{\varphi}, \\ \ddot{l} + \frac{k}{m}l &= \frac{k}{m}l_0 + l\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi. \end{aligned}$$

■

[**4.4**] Pohybová rovnice má tvar
$$\ddot{\alpha} + \frac{3}{2}\frac{g}{l}\cos\alpha = 0.$$

■

[**4.5**] Pohybové rovnice vozíku s kyvadlem mají tvar

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \mu\ddot{\varphi}\cos\varphi - \mu\dot{\varphi}^2\sin\varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{1}{l}\ddot{x}\cos\varphi + \omega_0^2\sin\varphi &= 0, \end{aligned}$$

kde x reprezentuje polohu vozíku a $\mu = ml/(m+M)$ a $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. ■

[**4.6**] Pohybová rovnice má tvar

$$\ddot{s} = g\sin\alpha - a\cos\alpha,$$

částice může setrvávat v klidu, jestliže platí $a = g\tan\alpha$. ■

[**4.7**] Pohybovou rovnici můžeme psát ve tvaru

$$\ddot{\vartheta} + \left(\omega_0^2 - \omega^2\cos\vartheta\right)\sin\vartheta = 0, \qquad \text{kde} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

■

[**4.8**] Pohybové rovnice můžeme psát ve tvaru

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} = 0, \qquad \ddot{r} - \frac{m}{M+m}r\dot{\varphi}^2 + \frac{Mg}{M+m} = 0.$$

nebo se zavedením úhlové rychlosti $\omega = \dot{\varphi}$

$$\ddot{r} - \frac{r_0^4\omega_0^2 m}{M+m}\frac{1}{r^3} + \frac{Mg}{M+m} = 0, \qquad \omega = \frac{r_0^2}{r^2}\omega_0,$$

kde r_0 a ω_0 jsou vzdálenost a úhlová rychlkost horní kuličky v nějakém okamžiku. ■

[**4.9**] Perioda kmitů kuličky nezávisí na amplitudě výchylky, neboť pohybová rovnice je rovnicí lineárního harmonického oscilátoru a má tvar

$$\ddot{q} + \frac{g}{4R}q = 0,$$

takže pro periodu kmitů platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{g}}.$$

■

5. Dynamika soustavy hmotných bodů

[**5.1**] Rychlost vagónu se před jeho naplněním s časem mění podle předpisu

$$v = \frac{m_0 v_0}{m_0 + \alpha t},$$

po naplnění potom

$$v = v_1 \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{m_1}(t-t_1)}.$$

■

[**5.2**] Výšky, do kterých kuličky po srážce vystoupí jsou

$$h_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 h, \qquad h_2 = \frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} h.$$

Druhá kulička po srážce pokračuje vždy směrem první kuličky před srážkou. Jestliže $m_1 > m_2$, první kulička po srážce nemění směr. Jestliže $m_1 < m_2$, první kulička po srážce změní směr. Pokud $m_1 = m_2$, první kulička se po srážce zastaví a druhá se pohybuje její rychlostí. ■

[**5.3**] Kuličky po srážce vyskočí do výšek

$$h_1 = \left(\frac{3m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h, \qquad h_2 = \left(\frac{m_2 - 3m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h,$$

lehčí kulička vyskočí do maximální výšky $h_{1\,\mathrm{max}} = 9h$, pokud hmotnost m_1 bude zanedbatelně malá oproti hmotnosti m_2.

■

[**5.4**] Rychlosti loděk před výměnou pytlů jsou

$$v_1 = -\frac{m_2 m}{m_1 m_2 - m_1 m - m_2 m} v_2', \qquad v_2 = \frac{(m_1 - m) m_2}{m_1 m_2 - m_1 m - m_2 m} v_2'.$$

označíme-li směr v_2' za kladný, dostaneme číselně $v_1 = -1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v_2 = 9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. ■

[**5.5**] Částice se srazí v čase t_s, na místě o souřadnici x_s a vzájemnou rychlostí v_s, pro které platí

$$t_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{2l m_1 m_2}{F(m_1 + m_2)}}, \qquad x_\mathrm{s} = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2}, \qquad v_\mathrm{s} = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2) F l}{m_1 m_2}}.$$

■

[**5.6**] Vztah mezi rychlostí střely a výchylkou kyvadla je

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)} = 2\frac{m + M}{m} \sqrt{gl} \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|,$$

poměr kinetické energie kyvadla E_kk těsně po zaseknutí střely a kinetické energie střely E_ks těsně před jejím zaseknutím je

$$\frac{E_\mathrm{kk}}{E_\mathrm{ks}} = \frac{m}{m + M} \ll 1.$$

■

[**5.7**] Pro velikost rychlosti střely před srážkou v a dobu pohybu krabice t_p se zaseknutou střelou platí

$$v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2\mu g l} = 199\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \qquad t_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{2l}{\mu g}} = 0{,}505\,\mathrm{s}.$$

■

[**5.8**] Člověk se vzhledem ke břehu posune o vzdálenost

$$l' = \frac{M}{m+M} l = 0,5\,\mathrm{m}.$$

■

[**5.9**] Dělo vystřelilo pod úhlem α', pro který platí

$$\tan\alpha' = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\tan\alpha.$$

■

[**5.10**] Pro velikosti rychlostí vozíků platí

$$v_2 = \sqrt{\frac{m_1 k}{m_2(m_1+m_2)}}\Delta x, \qquad v_1 = -\sqrt{\frac{m_2 k}{m_1(m_1+m_2)}}\Delta x,$$

vozíky se pohybují opačnými směry.

■

[**5.11**] Závaží budou na pružině kmitat s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)k}}.$$

■

6. Mechanika tuhého tělesa

[**6.1**] Pro síly napínající lana visuté lávky platí

$$T_1 = \left(\frac{M}{2} + \frac{l-d}{l}m\right)g, \qquad T_2 = \left(\frac{M}{2} + \frac{d}{l}m\right)g.$$

■

[**6.2**] Pro velikost sil působících na levá a pravá kola platí

$$F_\mathrm{l} = \frac{1}{2}mg\left(1 - \frac{hv^2}{drg}\right) = 2034\,\mathrm{N}, \qquad F_\mathrm{p} = \frac{1}{2}mg\left(1 + \frac{hv^2}{drg}\right) = 4924\,\mathrm{N}.$$

Automobil může po čtyřech kolech projet zatáčkou maximální rychlostí o velikosti

$$v_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{drg}{h}} \approx 214\,\mathrm{km\,h^{-1}}.$$

■

[**6.3**] Pro minimální potřebnou rychlost platí

$$v = \sqrt{\frac{g(r - h\cos\alpha)}{\mu}},$$

kde $\alpha = \arctan\mu$ je úhel sklonu jezdce vzhledem k vodorovné rovině. Dosazením číselných hodnot dostaneme $\alpha = 21°48'$, $v = 53,7\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

■

[**6.4**] Pro minimální úhel, pod kterým je žebřík opřený o stěnu ještě stabilní platí

$$\alpha_{\min} = \arctan\left(\frac{1}{2\mu}\right).$$

Pro minimální úhel žebříku s na něm stojícím člověkem platí

$$\alpha_{\min\ \check{z}+\check{c}} = \arctan\left[\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\frac{2d}{l}F_{g\check{c}} + F_{g\check{z}}}{F_{g\check{c}} + F_{g\check{z}}}\right)\right].$$

Pokud je tedy žebřík opřený pod úhlem $\alpha_{\min}$, žebřík se zřítí až v okamžiku, kdy člověk vystoupí do poloviční výšky! ■

[**6.5**] Pro minimální koeficient smykového tření nutný k zajištění stability hromádky lahví platí

$$\mu = \frac{\sin(\pi/6)}{1 + \cos(\pi/6)} \approx 0,268.$$

■

[**6.6**] Těžiště homogenního kužele leží na jeho ose ve vzdálenosti

$$z^* = \frac{h}{4}$$

směrem k vrcholu. ■

[**6.7**] Těžiště homogenní polokoule leží na ose symetrie ve vzdálenosti

$$z^* = \frac{3}{8}a$$

od základny směrem k vrcholu.

■

[**6.8**] Souřadnice těžiště objektu z obrázku a) jsou

$$\boldsymbol{r}^* = \left(\frac{a}{12}, -\frac{a}{12}\right),$$

pro objekt z obrázku b) dostaneme

$$\boldsymbol{r}^* = \left(\frac{a}{9}, 0\right),$$

■

[**6.9**] Nohu nejlépe umístímě do těžiště desky, které se nachází v ose desky ve vzdálenosti

$$y^* = \frac{4R}{3\pi}$$

od rovné hrany. ■

[**6.10**] Pro úhel sklonu ramene, za který drát visí, platí

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b^2}{a^2 + 2ab}\right).$$

■

[**6.11**] Pro moment setrvačnosti J_{st} vzhledem k ose procházející středem tyče a J_{okr} vzhledem k ose procházející okrajem platí

$$J_{\text{stř}} = \frac{1}{12}ml^2, \qquad J_{\text{okr}} = \frac{1}{3}ml^2.$$

■

[**6.12**] Pro moment setrvačnosti válce rotujícího podél osy platí

$$J = \frac{1}{2}mR^2.$$

■

[**6.13**] Moment setrvačnosti koule rotující kolem osy procházející jejím středem je

$$J = \frac{2}{5}mR^2.$$

■

[**6.14**] Pro moment setrvačnosti míče můžeme psát

$$J = \frac{2}{5}mR^2\frac{1-(r/R)^5}{1-(r/R)^3} \approx \frac{2}{3}mR^2.$$

■

[**6.15**] Pro zrychlení koule a válce na nakloněné rovině platí

$$a_{\text{koule}} = \frac{5}{7}\,g\sin\alpha = \frac{15}{21}\,g\sin\alpha, \qquad a_{\text{válec}} = \frac{2}{3}\,g\sin\alpha = \frac{14}{21}\,g\sin\alpha,$$

koule se tedy kutálí rychleji než válec.

■

[**6.16**] Koule se po stole bude po vymizení smýkavého pohybu valit konečnou rychlostí o velikosti

$$v = \frac{5}{7}v_0.$$

■

[**6.17**] Aby tyčka o délce l_t, obruč o poloměru r_o a kruhová deska o poloměru r_d kývaly se stejnou periodou jako matematické kyvadlo o délce L, musí pro jejich rozměry platit

$$l_\mathrm{t} = \frac{3}{2}L, \qquad r_\mathrm{o} = \frac{1}{2}L, \qquad r_\mathrm{d} = \frac{2}{3}L.$$

■

[**6.18**] Aby byla perioda kyvadla minimální, musí osa rotace procházet ve vzdálenosti

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

od středu. ■

[**6.19**] Kbelík se do studny pohybuje se zrychlením o velikosti

$$a = \frac{g}{1 + J/(mr^2)}.$$

■

[**6.20**] Vrchol komínu dopal na zem rychlostí

$$v = \sqrt{3gh}.$$

Tato rychlost je větší, než kdyby padal ze stejné výšky volným pádem! Bod, jenž na zem dopadne rychlostí kterou by ze stejné výšky padal volným pádem leží ve výšce

$$z = \frac{2}{3}h.$$

■

[**6.21**] Tyč se bude po zaseknutí střely otáčet úhlovou rychlostí

$$\omega = \frac{6mv}{(M+3m)l} \approx 5{,}91\,\mathrm{s}^{-1}.$$

■

[**6.22**] Hmotný střed (střed) tyčky se bude pohybovat směrem úderu rychlostí o velikosti

$$v_\mathrm{s} = \frac{I}{m} = 0{,}1\,\mathrm{m\,s}^{-1}.$$

Úhlová rychlost otáčení tyčky po úderu bude

$$\omega = \frac{6I}{ml} = 0{,}5\,\mathrm{rad\,s}^{-1}.$$

Střed tyčky za dobu trvání jedné otočky urazí vzdálenost

$$L = \frac{\pi l}{3} \approx 1{,}257\,\mathrm{m}.$$

■

[**6.23**] Pokud pro koeficient smykového tření bude platit vztah

$$\mu = \frac{\sqrt{2} - 1}{2},$$

vykonáme při posouvání i překlápění bedny stejnou práci. ■

[**6.24**] Aby se loď pootočila o úhel $\varphi_\mathrm{l} = 30°$, musí rotor vzhledem k ní vykonat

$$n = \frac{1}{2\pi} \frac{J_\mathrm{l}}{J_\mathrm{r}} \varphi_\mathrm{l} = 500\,\text{otáček}.$$

■

[**6.25**] Kruhová deska se bude otáčet úhlovou rychlostí

$$\omega_\mathrm{dz} = \frac{mrv}{J_\mathrm{d} + mr^2} = 0{,}1\,\mathrm{s}^{-1}$$

v opačném směru chůze člověka. ■

[**6.26**] Pro vykonanou práci platí

$$A = 3E_\mathrm{k0}.$$

■

7. Deformace tuhého tělesa

[**7.1**] Aby se měděný drát přetrhl vlastní vahou musí pro jeho délku platit

$$l > \frac{\sigma_\mathrm{p}}{\rho g} = 2,283\,\mathrm{km}.$$

■

[**7.2**] Aby mechanické napětí v obou závěsech bylo stejné musí platit

$$x = \frac{d}{1 + S_1/S_2}.$$

Aby prodloužení obou závěsů bylo stejné, musí platit

$$x = \frac{d}{1 + E_1 S_1/E_2 S_2}.$$

■

[**7.3**] Na vyšplhání po tuhém laně je třeba vykonat práci $A_\mathrm{a} = mgl_0$, pokud je lano pružné, pak pro tuto práci platí

$$A_\mathrm{b} = mgl_0 \left(1 + \frac{mg}{SE}\right).$$

■

[**7.4**] Tyč se vlastní vahou prodlouží o délku

$$\Delta l = \frac{\rho g l^2}{2E}.$$

■

[**7.5**] Poloměr pilíře musí narůstat exponenciálně se vzdáleností od břemene a platí pro něj

$$r(x) = \sqrt{\frac{G}{\pi\sigma_0}} \exp\left(\frac{\rho g}{2\sigma_0}x\right).$$

■

8. Gravitační pole

[**8.1**] Umělou družici je třeba umístit do výšky

$$h = \sqrt[3]{\frac{\varkappa M_Z T_Z^2}{4\pi^2}} - R_Z = 35\,833\,\mathrm{km}$$

nad povrch Země a udělit jí rychlost o velikosti

$$v = \sqrt[3]{\frac{2\pi\varkappa M_Z}{T_Z}} = 3\,071\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

ve směru tečny k rovníku v zeměpisné délce, na níž se nad rovníkem družice nachází. ■

[**8.2**] Konec lana musí být ve vzdálenosti (od středu Země) minimálně

$$x = \frac{\sqrt{R_Z^2 + \frac{8\varkappa M_Z}{\omega^2 R_Z}} - R_Z}{2}.$$

Dosazením číselných hodnot získáme $x \approx 151\,000\,\mathrm{km}$, což je zhruba 39% vzdálenosti mezi Zemí a Měsícem.

■

[**8.3**] Aby se družice pohybovala po kruhové trajektorii, musí být vystřelena rychlostí

$$v_{\mathrm{kr}} = \sqrt{\frac{\varkappa M_Z}{R_0}},$$

aby nedopadla na Zemi, musela by být vystřelena alespoň rychlostí

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{2\varkappa M_Z R_Z}{R_0(R_0 + R_Z)}} = v_{\mathrm{kr}}\sqrt{\frac{2R_Z}{R_0 + R_Z}}.$$

■

[**8.4**] Oběžná doba družice T je nepřímo úměrná odmocnině průměrné hustoty planety

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\varkappa\rho}} = \frac{konst.}{\sqrt{\rho}}$$

■

[**8.5**] Hmotnost Slunce vypočteme ze vztahu

$$M_\mathrm{S} = \frac{4\pi^2 R_\mathrm{ZS}^3}{\varkappa T_\mathrm{Z}^2} = 1,99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}.$$

Pro oběžnou rychlost Země kolem Slunce platí

$$v = \frac{2\pi R_\mathrm{ZS}}{T_\mathrm{Z}} = 29,8\,\mathrm{km\,s^{-1}}.$$

■

[**8.6**] Pro poměr mezi hmotnostmi Jupiteru a Země platí

$$\frac{M_\mathrm{J}}{M_\mathrm{Z}} = \left(\frac{T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{G}}\right)^2 \left(\frac{a_\mathrm{G}}{a_\mathrm{M}}\right)^3 \approx 314.$$

■

[**8.7**] Těleso vystoupá do výšky

$$h = \frac{v_0^2 R_\mathrm{Z}^2}{2\varkappa M_\mathrm{Z} - v_0^2 R_\mathrm{Z}}.$$

Aby nedopadlo zpět na Zemi, je třeba udělit mu druhou kosmickou rychlost

$$v_\mathrm{II} = \sqrt{\frac{2\varkappa M_\mathrm{Z}}{R_\mathrm{Z}}} \approx 11,2\,\mathrm{km\,s^{-1}}.$$

■

[**8.8**] Na hmotné těleso působí nulová gravitační síla ve vzdálenosti

$$r = \frac{9}{10}d$$

od středu Země směrem k Měsíci.

■

[**8.9**] Pro poměr výšek výskoku na Měsíci a Zemi platí

$$\frac{h_\mathrm{M}}{h_\mathrm{Z}} = \frac{g_\mathrm{Z}}{g_\mathrm{M}} \approx 6,$$

na Měsíci tedy oproti Zemi doskočíte zhruba 6× výše.

Pro poměr period kyvadlových hodin na Měsíci a na Zemi platí

$$\frac{T_\mathrm{M}}{T_\mathrm{Z}} = \sqrt{\frac{g_\mathrm{Z}}{g_\mathrm{M}}} \approx 2,45;$$

kukačky jdou tedy na Měsíci oproti Zemi $2,45\times$ pomaleji. ∎

[**8.10**] Bude-li mít planetka poloměr menší, nežli je hodnota

$$R_\mathrm{p} = \sqrt{hR_\mathrm{Z}} \approx 2,53\,\mathrm{km},$$

kde R_Z je poloměr Země, bude se moci experimentátor výskokem vymanit z jejího gravitačního pole. ∎

[**8.11**] Jízda tunelem z jedné strany na druhou by trvala

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{R_\mathrm{Z}^3}{\varkappa M_\mathrm{Z}}} = 42\,\mathrm{m}\ 15\,\mathrm{s}.$$

∎

[**8.12**] ro vzdálenost h, ve které je velikost intenzity gravitačního pole nad i pod povrchem Země stejná platí

$$h = R_\mathrm{Z}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \approx 0,618R_\mathrm{Z},$$

kde číslo $(\sqrt{5}-1)/2 \approx 0,618$ reprezentuje tzv. zlatý řez. ∎

[**8.13**] Pro dobu pádu kosmické lodi na Slunce bude platit

$$t_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{R^3}{2\varkappa M_\mathrm{S}}}\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \frac{1}{2}\sin 2\beta\right), \quad \text{kde} \quad \beta = \arctan\sqrt{\frac{R_\mathrm{S}}{R-R_\mathrm{S}}}.$$

Po dosazení číselných hodnot zjistíme, že kosmonauti mají čas $t_\mathrm{p} = 64$ dní, 19 hodin a 20 minut na přemýšlení, kde udělali chybu.

∎

[**8.14**] Pro potenciál a složky intenzity gravitačního pole platí

$$\begin{aligned}
\varphi &= \frac{\kappa M}{2l}\left(\operatorname{argsinh}\frac{x-l}{y} - \operatorname{argsinh}\frac{x+l}{y}\right),\\
K_x &= -\frac{\varkappa M}{2l}\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+(x-l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{y^2+(x+l)^2}}\right),\\
K_y &= \frac{\varkappa M}{2yl}\left(\frac{x-l}{\sqrt{y^2+(x-l)^2}} - \frac{x+l}{\sqrt{y^2+(x+l)^2}}\right).
\end{aligned}$$

∎

[**8.15**] Pro potenciál a intenzitu gravitačního pole platí

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{2\varkappa M}{a^2}\left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right), \\ K_x &= \frac{2\varkappa M}{a^2}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-1\right). \end{aligned}$$

■

[**8.16**] Pro potenciál a intenzitu gravitačního pole platí

$$\begin{aligned} \varphi &= \begin{cases} -\varkappa M/a & \text{pro} \quad x < a, \\ -\varkappa M/x & \text{pro} \quad x \geq a, \end{cases} \\ K_x &= \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x < a, \\ -\varkappa M/x^2 & \text{pro} \quad x > a. \end{cases} \end{aligned}$$

Na hmotnou částici kdekoliv uvnitř homogenní kulové slupky působí nulová síla, vně míří síla radiálně do středu kulové slupky a je shodná se silou, kterou by na částici působil hmotný bod o hmotnosti M umístěný na pozici středu kulové slupky. ■

9. Speciální teorie relativity

[**9.1**] Mion se musí pohybovat minimálně rychlostí

$$v = \frac{c}{\sqrt{1+c^2\tau^2/h^2}} \approx 0,99976\,c.$$

■

[**9.2**] Průzkumné plavidlo se vzhledem k Zemi pohybuje rychlostí

$$u = \frac{u'+v}{1+u'v/c^2} = 0,8\,c.$$

■

[**9.3**] Rakety se k sobě navzájem přibližují rychlostí o velikosti

$$u = \frac{u_1+u_2}{1+u_1u_2/c^2} = 0,988\,c.$$

■

[**9.4**] Záblesky budou na Zemi registrovány s časovým odstupem

$$\Delta\tau == \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}\,\Delta t' \approx 14,9\,\mathrm{s}.$$

■

[**9.5**] Aby řidič viděl červenou barvu jako zelenou, musel by jet rychlostí

$$v = \frac{\lambda_{\text{č}}^2-\lambda_{\text{z}}^2}{\lambda_{\text{č}}^2+\lambda_{\text{z}}^2}\,c \approx 0,24\,c,$$

takže pokutu asi dostane za rychlou jízdu.

■

[**9.6**] Jelikož pro hustotu pohybujícího se objektu platí

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 - v^2/c^2},$$

musí se pro její zdvojnásobení pohybovat rychlostí $v = c/\sqrt{2}$.

■

[**9.7**] Nerelativisticky:

$$v = \frac{qE}{m_0}t, \qquad x = \frac{qE}{2m_0}t^2.$$

Relativisticky:

$$v = \frac{qEct}{\sqrt{m_0^2c^2 + q^2E^2t^2}}, \qquad x = \frac{m_0c^2}{qE}\left(\sqrt{1 + \frac{q^2E^2t^2}{m_0^2c^2}} - 1\right).$$

Ze nerelativistického vzorce pro rychlost vyplývá, že částice se v konečném čase bude pohybovat nadsvětelnou rychlostí (což je špatně), relativistická verze vede k výsledku, že rychlosti světla bude dosaženo v nekonečném čase (což je v pořádku). Nerelativistické vzorce dostaneme z relativistických Taylorovým rozvojem.

■

[**9.8**] Částice se musí pohybovat rychlostí

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

■

[**9.9**] Pro dobu průletu Δt_{G} vzhledem ke vztažné soustavě spojené s Galaxií a vzhledem ke vztažné soustavě spojené s protonem (Δt_{p}) platí

$$\Delta t_{\mathrm{G}} = \frac{d}{c} = 100\,000\,\mathrm{let}, \qquad \Delta t_{\mathrm{p}} = \frac{d}{c}\frac{F_0}{E} = 4,98\,\mathrm{minut}.$$

Kolik kilogramů deuteria by bylo zapotřebí na pokrytí světové spotřeby energie z roku 1970, jestliže pro klidové hmotnosti deuteria a hélia platí $m_{0\mathrm{D}} = 2,0147\,\mathrm{au}$, $m_{0\mathrm{He}} = 4,0039\,\mathrm{au}$, kde pro atomovou jednotku platí $1\,au =$

■

[**9.10**] K vyprodukování potřebné energie je třeba

$$m" = \frac{2m_{0\mathrm{D}}E}{(2m_{0\mathrm{D}} - m_{0\mathrm{He}})c^2} \approx 360\,\mathrm{tun\ deuteria}.$$

■

[**9.11**] Pro energii mionu a antineutrina platí

$$E_\mu = \frac{(E_{\pi 0}^2 + E_{\mu 0}^2)}{2E_{\pi 0}} = 109,8\,\mathrm{MeV}, \qquad E_\nu = \frac{E_{\pi 0}^2 - E_{\mu 0}^2}{2E_{\pi 0}} = 29,8\,\mathrm{MeV}.$$

Mion se pohybuje rychlostí

$$v = \sqrt{1 - \frac{E_0^2}{E2}}\, c = 0,27\, c.$$

■

[**9.12**] Pro klidovou hmotnost nově vzniklé částice platí

$$M_0 = m_0\sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}} = \frac{4}{\sqrt{3}} m_0,$$

tato částice se pohybuje rychlostí

$$u = \frac{v}{1 + \sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{c}{2}.$$

■

10. Mechanika kapalin

[**10.1**] Pro objem části pod hladinou V_p a nad hladinou V_n platí

$$V_\mathrm{p} = \frac{\rho_\mathrm{l}}{\rho_\mathrm{v}} V = 0,92\, V, \qquad V_\mathrm{n} = \frac{\rho_\mathrm{v} - \rho_\mathrm{l}}{\rho_\mathrm{v}} V = 0,08\, V.$$

Hladina ve sklenici se roztáním ledu nijak nezvýší.

■

[**10.2**] Aby koule na vodě plavala, musí pro její tloušťku stěny platit

$$h < R\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\rho_\mathrm{m} - \rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{m}}}\right) \approx 4,09\,\mathrm{mm}.$$

■

[**10.3**] Hustotu krychle určíme jako

$$\rho = \frac{F_\mathrm{g}}{F_\mathrm{g} - F_\mathrm{gv}} \rho_\mathrm{v} = 8\,290\,\mathrm{kg\,m^{-3}},$$

dále pak hmotnostní podíl mědi

$$p_\mathrm{m} = \frac{\rho - \rho_\mathrm{c}}{\rho_\mathrm{m} - \rho_\mathrm{c}} \frac{\rho_\mathrm{m}}{\rho} = 0,7.$$

Odtud tedy vyplývá, že hmotnost krychle je tvořena ze 70% mědí a z 30% cínem. Heuréka!
■

[**10.4**] Pro hmotnost předmětu platí

$$m = m_{\mathrm{z}} \frac{1 - \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho_{\mathrm{z}}}}{1 - \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho}} = m_{\mathrm{z}} \left(1 + \rho_{\mathrm{v}} \frac{\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_{\mathrm{z}}}}{1 - \frac{\rho_{\mathrm{v}}}{\rho}} \right).$$

Z výsledku je patrné, že zejména při vážení objektů s malou hustotou je třeba při určování hmotnosti provádět příslušnou korekci, neboť jejich skutečná hmotnost je větší, než hmotnost závaží m_{z}. ■

[**10.5**] Pro poměr hustot kapalin platí

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1}.$$

■

[**10.6**] Pro periodu harmonických kmitů kapaliny v u-trubici platí

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{2g}}.$$

■

[**10.7**] Zkumavka bude po vychýlení vykonávat harmonické kmity s periodou

$$\omega_0^2 = \frac{\rho S g}{m} \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho S g}}.$$

■

[**10.8**] Hladina je zakřivena podle funkce

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2,$$

má tedy tvar rotačního paraboloidu. Toho se využívá například v astronomii, kdy takto zakřivená hladina se používá jako primární zrcadlo dalekohledu, který ovšem může pozorovat pouze objekty v zenitu. ■

[**10.9**] Voda působí na přehradní hráz silou o velikosti

$$F = \frac{\rho g h^2 l}{2 \sin \alpha},$$

kde ρ je hustota vody.

■

[**10.10**] Pro velikost momentu síly platí

$$M = \frac{1}{6} \rho g l h^2 |h - 3 z_0|,$$

takže pro $z_0 = h/2$ dostaneme

$$M = \frac{1}{12}\rho g l h^3.$$

Moment síly je nulový, pokud $z_0 = h/3$. ■

[**10.11**] Proud vody se zužuje podle předpisu

$$r(x) = \frac{R}{\sqrt[4]{1 + 2gx/v_0^2}}.$$

■

[**10.12**] Vzorec pro výpočet objemového průtoku má tvar

$$Q = \sqrt{\frac{2gHS_1^2S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}}.$$

■

[**10.13**] Pro dobu výtoku kapaliny z nádoby platí

$$T = \frac{S_1}{S_2}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

■

[**10.14**] Aby hladina klesala konstantní rychlostí, musí platit

$$r(z) \propto \sqrt[4]{z}.$$

■

[**10.15**] Hladina se ustálí ve výšce

$$h = \frac{Q^2}{2gS^2} = 10\,\mathrm{cm}$$

ode dna nádoby. ■

[**10.16**] Kapalina dolétne do maximální vzdálenosti $x_{\max} = H$, pokud bude otvor umístěn ve výšce $z = H/2$.

■

[**10.17**] Aby kapalina z obou otvorů dolétla do stejné vzdálenosti x, musí platit

$$H = z_1 + z_2,$$

přičemž

$$x = 2\sqrt{z_1 z_2}.$$

■

11. Elektrostatické pole

[**11.1**] Elektrostatická síla je o 42 řádů silnější, platí-

$$\frac{F_\mathrm{C}}{F_\mathrm{G}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varkappa}\frac{q_\mathrm{e}^2}{m_\mathrm{e}^2} \approx 10^{42},$$

kde q_e a m_e jsou hmotnost a náboj elektronu.

■

[**11.2**] Nabité kuličky mají stejný náboj o velikosti

$$q = \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 mgd^3}{\sqrt{4l^2 - d^2}}} \approx 5{,}84 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}.$$

■

[**11.3**] Konfigurace je rovnovážná, jestliže $q = 4Q$. Tato rovnováha je však labilní, neboť posuneme-li jeden z krajních nábojů o malou vzdálenost Δx doleva nebo doprava, začne na něj působit síla, která má směr výchylky a velikost

$$F \approx \frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0 l^3}\Delta x.$$

■

[**11.4**] Náboje budou v rovnováze, pokud bude platit

$$Q = (1 + 2\sqrt{2})\frac{q}{4}.$$

■

[**11.5**] Pro potenciál a intenzitu elektrického pole v ose kruhové smyčky platí

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + z^2}}, \qquad \boldsymbol{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(0, 0, \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}\right).$$

Velikost intenzity elektrického pole je maximální pro $z = a/\sqrt{2}$.

■

[**11.6**] Pro potenciál v ose nabité kruhové desky platí

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{a^2 + z^2} - |z|).$$

Pro složky vektoru intenzity elektrického pole platí

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\mathrm{sign}(z) - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right].$$

Pro $|z| \ll a$ můžeme psát

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathrm{sign}(z).$$

■

[**11.7**] Pro vektor intenzity elektrického pole můžeme psát

$$\boldsymbol{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 a}\boldsymbol{n}_0,$$

kde $\boldsymbol{n}_0$ je normálový jednotkový vektor k nabité niti. Pro elektrický potenciál platí

$$\varphi = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln a + K,$$

kde K je libovolná konstanta. ■

[**11.8**] Pro intenzitu elektrického pole platí

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\boldsymbol{r}, & \text{pro} \quad r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}, & \text{pro} \quad r \geq R. \end{cases}$$

Pro potenciál můžeme psát

$$\varphi = \begin{cases} -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}r^2 + \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R}, & \text{pro} \quad r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & \text{pro} \quad r \geq R. \end{cases}$$

Zde $\boldsymbol{r}$ značí polohový vektor bodu, v němž veličiny $\boldsymbol{E}$ a φ ur4ujeme vzhledem ke středu nabité koule. ■

[**11.9**] Pro vektor intenzity elektrického pole platí

$$\boldsymbol{E} = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \text{pro} \quad r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\boldsymbol{r}, & \text{pro} \quad r \geq R. \end{cases}$$

pro potenciál můžeme psát

$$\varphi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}, & \text{pro} \quad r < R, \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, & \text{pro} \quad r \geq R. \end{cases}$$

■

[**11.10**] Pro kapacitu kondenzátoru platí

$$C = \frac{1}{1/C_2 + 2/C_1}, \quad \text{kde} \quad C_1 = \frac{\varepsilon_1 S}{d_1} \quad \text{a} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_2 S}{d_2}.$$

Po dosazení číselných hodnot dostaneme $C = 516\,\mathrm{pF}$. ■

[**11.11**] Pro kapacitu kondenzátoru platí

$$C = \varepsilon_0\frac{S - S_\mathrm{d}}{d} + \varepsilon_0\varepsilon_\mathrm{r}\frac{S_\mathrm{d}}{d} = \varepsilon_0\frac{S}{d}\left[1 + (\varepsilon_\mathrm{r} - 1)\frac{S_\mathrm{d}}{S}\right].$$

■

[**11.12**] Pro kapacitu kulového kondenzátoru platí

$$C = \frac{4\pi\varepsilon r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

■

[**11.13**] Pro kapacitu Zeměkoule platí

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R_{\mathrm{Z}} = 709\,\mu\mathrm{F}.$$

■

[**11.14**] Pro kapacitu válcového kondenzátoru platí

$$C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$

■

[**11.15**] Pro kapacitu dvojlinky můžeme psát

$$C = \frac{\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{a-r}{r}}.$$

■

[**11.16**] Na umístění nábojů do rohů krychle je třeba vykonat práci

$$A = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a}\left(3 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

■

[**11.17**] Za uvedených předpokladů by pro poloměr elektronu muselo platit

$$r_{\mathrm{e}} = \frac{q_{\mathrm{e}}^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2 m_{\mathrm{e}}} = 1,4 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}.$$

■

[**11.18**] Po vytažení dielektrika se napětí na kondenzátoru zvětší na hodnotu $U = \varepsilon_{\mathrm{r}} U_0 = 5000\,\mathrm{V}$. Na vytažení dielektrika je třeba vynaložit práci

$$A = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{\mathrm{r}} S U_0^2}{2d}(\varepsilon_{\mathrm{r}} - 1) = 8,85 \times 10^{-4}\,\mathrm{J}.$$

■

[**11.19**] Desky kondenzátoru se přitahují silou o velikosti

$$F = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2} = 44,3\,\mathrm{mN}.$$

■

[**11.20**] Pro dipólový moment tohoto „atomu“ platí

$$\boldsymbol{p} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \boldsymbol{E}_0,$$

dipólový moment má tedy směr intenzity elektrického pole a velikost momentu je přímo úměrná velikosti intenzity elektrického pole. ■

[**11.21**] Pro rychlost elektronu uprostřed mezi elektrodami a při dopadu na anodu platí

$$v_{1/2} = \sqrt{\frac{2q_e U \ln[(a+b)/2a]}{m_e \ln(b/a)}} = 8,8 \times 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}} \qquad v_a = \sqrt{\frac{2q_e U}{m_e}} = 10,3 \times 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

■

12. Magnetostatické pole

[**12.1**] Pro velikost vektoru magnetické indukce platí

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a},$$

směr určíme pravidlem pravé ruky. ■

[**12.2**] Vektor magnetické indukce v ose kruhové smyčky má axiální směr a pro jeho velikost platí

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}.$$

■

[**12.3**] Magnetická indukce v ose uprostřed mezi smyčkami zhruba konstantní, pokud jejich vzdálenost bude rovna poloměru, pro velikost indukce pak platí

$$R \approx \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 I}{a}.$$

■

[**12.4**] Pro velikost vektoru magnetické indukce platí

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}.$$

■

[**12.5**] Pro velikost vektoru magnetické indukce platí

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad \text{pro} \quad r > R, \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r, \quad \text{pro} \quad r \leq R.$$

■

[**12.6**] Nabitá částice se pohybuje podél silokřivek magnetického pole po šroubovici s parametrickými rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r_\mathrm{c} \sin(\omega_0 t - \varphi_0) + c_x, \\ y &= r_\mathrm{c} \cos(\omega_0 t - \varphi_0) + c_y, \\ z &= v_{0z} t + c_z, \end{aligned}$$

kde c_x, c_y, c_z jsou integrační konstanty závislé na počátečním polohovém vektoru, $r_\mathrm{c} = m\sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2}/(qB_0)$ je poloměr šroubovice, $\omega_0 = qB_0/m$ je tzv. cyklotronová frekvence a $\tan\varphi_0 = v_{0y}/v_{0x}$.

■

[**12.7**] Vektor rychlosti nabité částice má složky

$$v_x = \frac{E_0}{B_0} \sin \frac{qB_0}{m} t, \qquad v_y = \frac{E_0}{B_0} \left(\cos \frac{qB_0}{m} t - 1 \right), \qquad v_z = 0.$$

Vektor rychlosti má střední hodnotu $\overline{\mathbf{v}} = (0, -E_0/B_0, 0)$ což znamená, že částice se posouvá (driftuje) kolmo na oba vektory $\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{B}$ a velikost této driftové rychlosti nezávisí na hmotnosti a náboji částice!

Pro polohový vektor částice můžeme psát

$$x = \frac{\beta}{\alpha^2}(1 - \cos\alpha t), \qquad y = \frac{\beta}{\alpha^2}(\sin\alpha t - \alpha t), \qquad z = 0,$$

kde $\alpha = qB_0/m$ a $\beta = qE_0/m$. Trajektorií částice je tedy cykloida.

■

13. Nové kousky

[**13.1**] Kulička se zastaví v čase $t = \infty$ a urazí mezi tím nekonečnou vzdálenost. ■

[**13.2**] Výpravčího bude $n-$tý vagón míjet po dobu

$$\Delta t_n = \Delta t_1 (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

■

[**13.3**] Pro potenciál a složky vektoru intenzity gravitačního pole v ose tyče platí

$$\varphi(x) == \frac{\varkappa M}{2l} \ln \left(\frac{x-l}{x+l} \right) + C, \qquad K_x = -\frac{\varkappa M}{x^2 - l^2}, \qquad K_y = 0.$$

■

[**13.4**] Pro potenciál a složky vektoru intenzity gravitačního pole můžeme psát

$$\varphi = -\frac{\varkappa M}{l} \operatorname{argsinh} \frac{l}{y} + C, \qquad K_x = 0, \qquad K_y = -\frac{\varkappa M}{y\sqrt{y^2 + l^2}}.$$

■

[**13.5**] Pro potenciál a složky intenzity gravitačního pole platí

$$\varphi = 2\varkappa\mu \ln y + C, \qquad K_x = 0, \qquad K_y = -\frac{2\varkappa\mu}{y}.$$

■

15. Reference

[1] Vladimír Hajko, *Fyzika v príkladoch*, Alfa, Bratislava, 1983.

[2] Antonín Syrový, *Sbírka příkladů z fyziky*, SNTL, Praha, 1971.

[3] Jiří Bajer, *Mechanika 1*, VUP Olomouc, Olomouc, 2004.

[4] Jiří Bajer, *Mechanika 2*, VUP Olomouc, Olomouc, 2004.

[5] Ivan Štoll, *Mechanika*, ČVUT, Praha, 1995.

[6] Ivan Štoll, *Elektřina a magnetismus*, ČVUT, Praha, 1998.

[7] Jaroslava Drchalová, *FYZIKA - Příklady*, ČVUT, Praha, 1997.

[8] Walter Greiner, *Classical Mechanics: Point Particles and Relativity (Classical Theoretical Physics)*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[9] Walter Greiner, *Classical Mechanics: Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics (Classical Theoretical Physics)*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[10] Walter Greiner, *Classical Mechanics: Point Particles and Relativity (Classical Theoretical Physics)*, Springer-Verlag, New York, 2004.

[11] Filip Uhlík, Zuzana Limpouchová, Eduard Vavřinec, *Sbírka příkladů z mechaniky*, Univerzita Karlova v Praze, Nakladatelství Karolinum, Praha, 2000.

[12] Karel Rektorys, *Co je a k čemu je vyšší matematika*, ACADEMIA, Praha, 2001.

[13] David J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, Prentice Hall, New Yersey, 1999.