

Část I

Užitý matematický aparát

Kapitola 1

Užitý matematický aparát

V této kapitole bude uveden matematický aparát, se kterým se můžete setkat během kurzu Fyziky I a samozřejmě nejenom v tomto kurzu.

1.1 Parciální derivace

Ve fyzice se často setkáváme s funkcemi více proměnných. Pro takovéto funkce zavádíme *parciální* (*částečné*) *derivace* podle jedné z proměnných, přičemž zbývající proměnné považujeme za konstanty. Budeme-li uvažovat např. funkci $f(x, y, z)$, která je funkcí pouze prostorových souřadnic, pak parciální derivaci podle proměnné x definujeme jako

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}. \quad (1.1)$$

Zderivujeme-li funkci $\partial f / \partial x$ ještě jednou podle proměnné x , pak dostaneme druhou parciální derivaci (druháho stupně) funkce f , tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Provedeme-li následně po derivování podle proměnné x derivaci např. podle proměnné y , pak tuto skutečnost zapíšeme následujícím způsobem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Pro parciální derivace vyšších řádů platí tzv. *Schwarzova věta* o záměně pořadí derivování. Nechť v nějakém okolí $U(A)$ bodu A existují parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

potom existuje i smíšená derivace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

a platí, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Příklad:

Uvažujme funkci

$$f(x, y, z, t) = 3x^2yt - xyz t^3 + \sin(yt).$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xyt - yzt^3,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6yt,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = 6xy - 3yzt^2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2t - xzt^3 + t \cos(yt).$$

Jestliže $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ je vektorová funkce, pak parciální derivace této funkce např. podle proměnné x je definována následujícím způsobem

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta x}, \quad (1.2)$$

pakliže existuje tato limita.

Obdobně bychom definovali parciální derivace podle proměnných y a z . Vyšší derivace jsou pak určeny následujícím způsobem

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) \quad \text{apod.}$$

Jestliže \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou diferencovatelné vektorové funkce podle skalární proměnné t a skalární funkce ϕ je diferencovatelná podle skalární proměnné t , potom platí následující vztahy

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (1.3)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (1.4)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (1.5)$$

$$\frac{d}{dt}(\phi \mathbf{A}) = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{A} + \phi \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

1.2 Diferenciál funkce jedné proměnné

Derivace $f'(x)$ funkce $y = f(x)$ je definována jako

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1.8)$$

Protože má limita konečnou hodnotu $f'(x)$, můžeme psát, že

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon_x, \quad (1.9)$$

přičemž pro $\varepsilon_x(\Delta x)$ platí, že

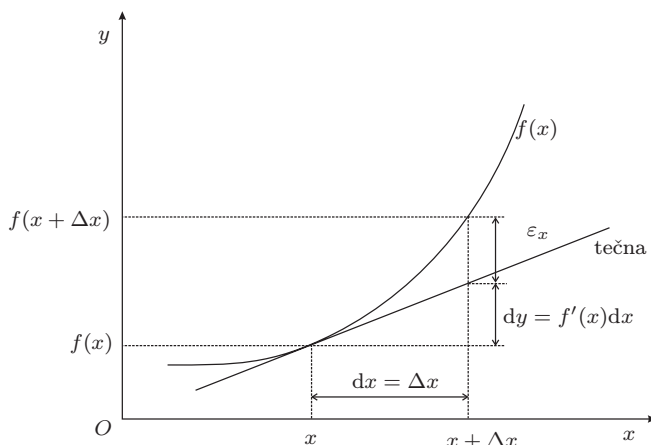
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_x = 0 . \quad (1.10)$$

Δy , resp. $\Delta f(x)$ představuje *přírůstek* funkce $f(x)$ a Δx je přírůstek nezávislé proměnné x (viz obr. 1.1).

Ze vztahu (1.9) pro přírůstek funkce vyplývá, že

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon_x \Delta x . \quad (1.11)$$

Nyní můžeme definovat *diferenciál* funkce jedné proměnné $f(x)$ jako



Obrázek 1.1: Geometrická interpretace diferenciálu.

$$dy = f'(x)\Delta x , \quad (1.12)$$

resp.

$$df = f'(x)\Delta x . \quad (1.13)$$

Předpokládejme, že $f(x) = x$, potom $y = x$ a $f'(x) = 1$, takže na základě vztahu (1.12) můžeme psát

$$dx = f'(x)\Delta x = \Delta x , \quad (1.14)$$

tedy diferenciál nezávislé proměnné x můžeme ztotožnit s přírůstkem této proměnné. Odtud je vidět, že dx nemusí být nějaká „nekonečně malá“ veličina, ale může to být libovolné reálné číslo. Z tohoto důvodu můžeme přepsat vztah (1.12) do následujícího tvaru

$$dy = f'(x)dx . \quad (1.15)$$

Na základě definice diferenciálu (1.12) můžeme výraz (1.11) přepsat jako

$$\Delta y = dy + \varepsilon_x \Delta x . \quad (1.16)$$

Platí-li, že $\Delta x \rightarrow 0$, potom (viz limita (1.10)) platí, že

$$\Delta y = dy . \quad (1.17)$$

V tomto případě, kdy se jedná o nekonečně malý přírůstek nezávislé proměnné x , je pak možné přepsat vztah (1.11) pomocí vztahů (1.14) a (1.17) a limity (1.10) do následujícího tvaru

$$dy = f'(x)dx , \quad (1.18)$$

odtud

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) , \quad (1.19)$$

tj. v případě infinitezimálního přírůstku $\Delta x \rightarrow 0$ je možné derivaci funkce $f(x)$ vyjádřit jako poměr diferenciálů dy a $dx = \Delta x \rightarrow 0$.

Z aplikačního hlediska však spočívá užitečnost diferenciálu (1.15) právě v tom, že pro „malé“ hodnoty dx vystihuje přírůstek

$$\Delta y = f(c + dx) - f(c) \quad (1.20)$$

funkce $f(x)$ v okolí bodu c ,

Příklad

Nechť $dx = 0,3$, je přírůstek Δy funkce $y = x^2$ mezi body $c = 1$ a $c + dx = 1 + 0,3 = 1,3$ rovný číslu

$$\Delta y = 1,3^2 - 1^2 = 1,69 - 1 = 0,69$$

a ten je dobře aproximován diferenciálem

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx = 2xdx = 2 \cdot 1 \cdot 0,3 = 0,60 .$$

1.3 Totální diferenciál

Přírůstek funkce více proměnných, zvolme např. x, y, z , bude dán vztahem

$$\Delta f = f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) . \quad (1.21)$$

Z analogie s diferenciálem funkce jedné proměnné (1.15), můžeme zavést tzv. *totální (úplný) diferenciál* funkce $f(x, y, z)$ následujícím způsobem¹

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz . \quad (1.22)$$

Dá se ukázat, že pro přírůstek funkce (1.21) platí

$$\Delta f = df + \varepsilon_x \Delta x + \varepsilon_y \Delta y + \varepsilon_z \Delta z , \quad (1.23)$$

přičemž platí, že

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon_x = 0 , \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \varepsilon_y = 0 , \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \varepsilon_z = 0 . \quad (1.24)$$

Bude-li platit, že $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$, potom na základě limity (1.24) ze vztahu (1.23) vyplývá, že

$$\Delta f = df . \quad (1.25)$$

Napišme *Taylorův rozvoj* funkce více proměnných $f(\mathbf{r}) \equiv f(x, y, z)$ do prvního řádu

$$f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = f(x + dx, y + dy, z + dz) = f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots . \quad (1.26)$$

¹Opět platí, že přírůstky nezávislých proměnných x, y, z jsou totožné s jejich diferenciály, jak lze lehce ověřit volbou $f(x, y, z) = x, f(x, y, z) = y, f(x, y, z) = z$ (1.22).

Odtud dostáváme, že

$$\Delta f = f(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - f(\mathbf{r}) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \dots = df + \text{členy vyšších řádů} . \quad (1.27)$$

Takže úplný diferenciál představuje hlavní hodnotu Taylorova rozvoje funkce f .

Pozn.:

Často se ve fyzice setkáváme s funkcemi $f(x, y, z, t)$, potom totální diferenciál je dán jako

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial t}dt . \quad (1.28)$$

Pozn.:

Ve fyzice zpravidla předpokládáme, že přírůstky, resp. diferenciály, nezávislých proměnných jsou infinitesimální, tj. $dx = \Delta x \rightarrow 0$, $dy = \Delta y \rightarrow 0$, $dz = \Delta z \rightarrow 0$, $dt = \Delta t \rightarrow 0$.

1.4 Einsteinovo sumační pravidlo

Pro úspornost a přehlednost používáme ve vektorovém a tenzorovém počtu *Einsteinovo sumační pravidlo*, které říká, že se sčítá přes index, jenž se objevuje ve výrazu dvakrát, aniž znak pro sčítání (sumaci) explicitně vypisujeme.

Např.:

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_i \equiv a_i b_i$$

nebo

$$\sum_{i=1}^3 a_i b_{ij} \equiv a_i b_{ij} .$$

1.5 Souřadnicové systémy

Abychom mohli popsat polohu a spojitý pohyb tělesa v prostoru, musíme označit jednotlivé body prostoru. Omezíme se na třírozměrný eukleidovský prostor. Pro popis jednotlivých bodů prostoru používáme souřadnicovou soustavu, pomocí které každému bodu přiřadíme trojici čísel u_1, u_2, u_3 , kterým říkáme *souřadnice* neboli *koordináty* bodu. Pokud zvolíme jednu souřadnici pevně a zbylé dvě necháme „probíhat“ všemi dovolenými hodnotami, dostaneme tzv. *souřadnicové plochy*. Souřadnicové plochy $u_1 = c_1, u_2 = c_2, u_3 = c_3$, kde c_1, c_2 a c_3 jsou konstanty, se protínají v *souřadnicových křivkách* (čarách). Pokud jsou všechny rovinami, hovoříme o *přímočarých souřadnicích*, není-li tomu tak, pak hovoříme o *křivočarých souřadnicích*. Pokud se všechny protínají navzájem kolmo, hovoříme o *ortogonálních* (pravoúhlých) *souřadnicích*, a pokud ne, pak hovoříme o *neortogonálních* (kosoúhlých) *souřadnicích*.

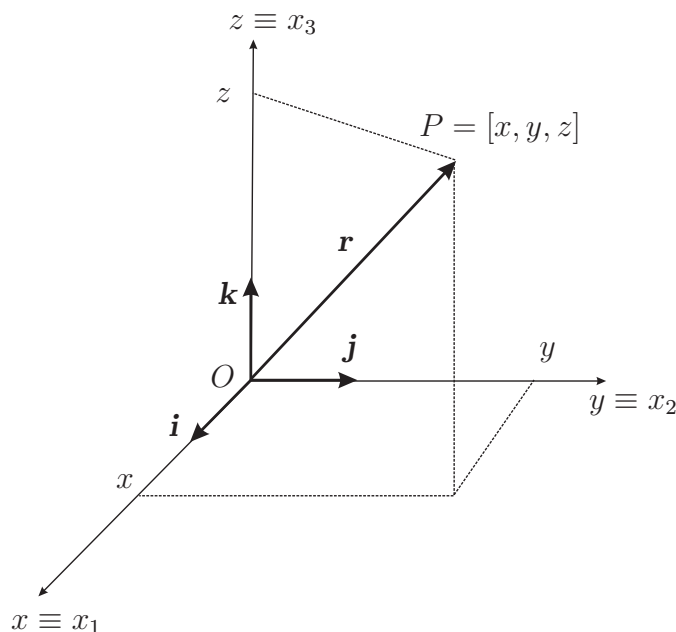
1.5.1 Kartézská souřadnicová soustava

Jedná se o nejčastěji používanou souřadnicovou soustavu, kterou v roce 1637 zavedl René Descartes (1596-1650) ve své knize *Rozpravy o metodě*. Označení této souřadnicové soustavy přívlastkem *kartézská* vychází z latinského přepisování jména jeho autora *Cartesius*. Tato souřadnicová soustava (systém) je přímočará a ortogonální.

Tuto soustavu tvoří tři vzájemně kolmé přímky, tzv. *osy*, které se protínají v bodě zvaném *počátek*

souřadnicové soustavy, jež značíme symbolem O (*lat. origo = počátek*). Osy zpravidla označujeme x, y, z nebo x_1, x_2, x_3 , viz obr. 1.2. Souřadnice x, y, z libovolného bodu $P = [x, y, z]$ určíme jako průsečík tří rovin, z nichž první je ve vzdálenosti x od počátku rovnoběžná s rovinou (y, z) , druhá ve vzdálenosti y od počátku rovnoběžná s rovinou (x, z) a třetí ve vzdálenosti z od počátku rovnoběžná s rovinou (x, y) . Spojnici počátku O s libovolným bodem nazýváme *polohovým vektorem* (*průvodičem, rádius-vektorem*) uvažovaného bodu prostoru vzhledem k bodu O a značíme ho zpravidla \mathbf{r} .

Jednotkové souřadnicové vektory obvykle značíme $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ nebo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ či $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ a polohový vektor



Obrázek 1.2: Kartézské souřadnice

pak bude

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (1.29)$$

kde x, y, z jsou kartézské souřadnice polohového vektoru \mathbf{r} (jeho koncového bodu), viz obr 1.2.

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad (1.30)$$

$$\mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad (1.31)$$

$$\mathbf{k} = (0, 0, 1). \quad (1.32)$$

Pro souřadnicové vektory platí, že jsou lineárně nezávislé a že jsou na sebe kolmé, tj.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.33)$$

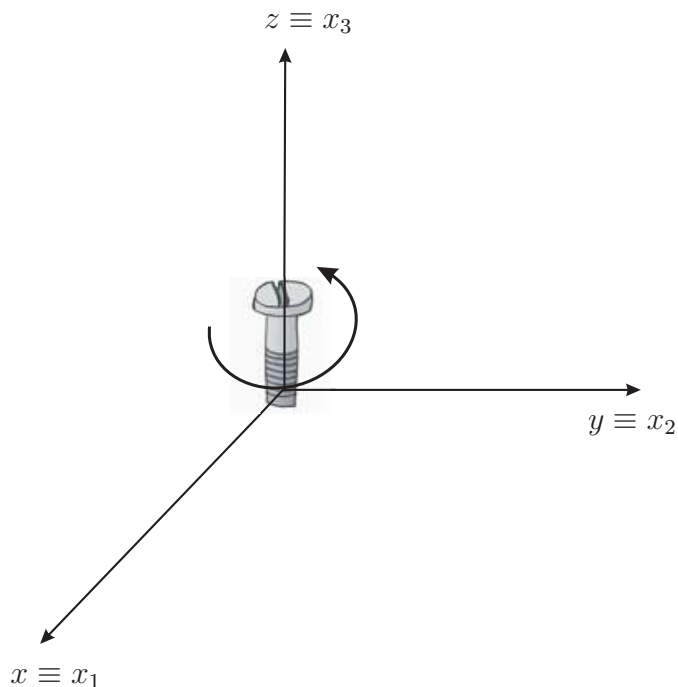
kde tečkou ve vztahu (1.33) je značen skalární součin vektorů a δ_{ij} je tzv. *Kroneckerovo delta*. Vztah (1.33) platí obecně pro ortogonální souřadnicové soustavy.

V trojrozměrném případě musíme dávat pozor na vzájemnou orientaci souřadnicových os v pořadí x, y, z . Ve fyzice se téměř výhradně používá pravotočivá souřadnicová soustava. Máme-li pravotočivý šroub a budeme jím otáčet od kladného směru osy x nejkratší cestou ke kladnému směru osy y a bude-li se šroub přitom posunovat v kladném směru osy z , nazýváme takovou kartézskou soustavu *pravotočivou*. Zaměníme-li u pravotočivé kartézské soustavy smysl jedné nebo všech tří os, dostaneme

soustavu *levotočivou*, viz obr. 1.3. Kartézské soustavy levotočivé či pravotočivé nelze navzájem převést pouhým posouváním a natáčením.

Ve fyzice používáme jen pravotočivou kartézskou soustavu.

Pro infinitezimální změnu polohového vektoru budeme psát



Obrázek 1.3: Definování pravotočivé kartézské soustavy pomocí šroubu.

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} . \quad (1.34)$$

Při pohybu hmotného bodu se jeho polohový vektor \mathbf{r} s časem mění a jeho koncový bod opisuje *pohybovou křivku* neboli *trajektorii*. Obloukový element ds křivky mezi body o souřadnicích $[x, y, z]$ a $[x + dx, y + dy, z + dz]$ je dán následovně²

$$ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} . \quad (1.35)$$

Označíme-li α, β, γ úhly, jež svírá polohový vektor \mathbf{r} s kladnými směry souřadnicových os x, y, z , pak pro souřadnice polohového vektoru platí

$$x = r \cos \alpha , \quad y = r \cos \beta , \quad z = r \cos \gamma , \quad (1.36)$$

kde r značí absolutní hodnotu (velikost) polohového vektoru, tedy

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} . \quad (1.37)$$

Směrové kosiny splňují normovací podmínku

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 . \quad (1.38)$$

²Je to vlastně Pythagorova věta pro tělesnou úhlopříčku pravoúhlého rovnoběžnostěnu o hranách $ds_1 = dx, ds_2 = dy, ds_3 = dz$.

1.5.2 Křivočaré souřadnicové soustavy

Ve fyzice užíváme různých souřadnicových soustav. Doposud byla zmíněna pouze kartézská souřadnicová soustava. Vedle této soustavy používáme i soustavy jiné, které jsou pro fyzikální popis vhodnější. V dané oblasti prostoru Ω necht' jsou dány tři navzájem nezávislé, spojitě a jednoznačné funkce kartézských souřadnic x, y, z

$$u_1 = u_1(x, y, z), \quad u_2 = u_2(x, y, z), \quad u_3 = u_3(x, y, z), \quad [x, y, z] \in \Omega. \quad (1.39)$$

V oblasti Ω necht' mají funkce (1.39) spojitě parciální derivace prvního řádu. Dále předpokládejme, že funkcionální determinant (jacobian)

$$\frac{\partial(u_1, u_2, u_3)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (1.40)$$

je v uvažované oblasti od nuly různý. Pak mají v uvažované oblasti rovnice (1.39) jednoznačné inverzní řešení

$$x = x(u_1, u_2, u_3), \quad y = y(u_1, u_2, u_3), \quad z = z(u_1, u_2, u_3). \quad (1.41)$$

Každému bodu $P = [x, y, z]$ v dané oblasti Ω je rovnicemi (1.39) přiřazena trojice čísel u_1, u_2, u_3 (souřadnice) a obráceně tato trojice určuje jednoznačně polohu bodu $P = [u_1, u_2, u_3]$.

Každým bodem P procházejí tři souřadnicové plochy, viz obr. 1.2

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2, \quad u_3 = c_3, \quad (1.42)$$

kde c_1, c_2, c_3 jsou konstanty. Souřadnicové křivky jsou na obr. 1.4 označeny u_1, u_2 a u_3 .

Necht' $\mathbf{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor bodu P . Na základě transformačních vztahů (1.39) je možné tento polohový vektor vyjádřit i pomocí souřadnic u_1, u_2, u_3 , tj. $\mathbf{r} = (u_1, u_2, u_3)$. Tečný vektor k souřadnicové křivce u_1 , pro kterou u_2 a u_3 jsou konstanty, je dán výrazem

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}. \quad (1.43)$$

Pak jednotkový vektor v tomto směru \mathbf{e}_1 je dán následujícím vztahem

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right|. \quad (1.44)$$

Vektor (1.43) je možné vyjádřit jako

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{e}_1, \quad (1.45)$$

kde

$$h_1 = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \right|. \quad (1.46)$$

K podobným vztahům můžeme dospět i pro tečné vektory zbývajících souřadnicových křivek, takže obecně můžeme psát, že

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = h_i \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.47)$$

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} / \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right|. \quad (1.48)$$

a

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| \quad (1.49)$$

jsou tzv. *Lameovy koeficienty*.

Na rozdíl od kartézského souřadnicového systému, se souřadnicové vektory \mathbf{e}_i mění spojitě od místa k místu svůj směr.

Pro infinitizimální změnu polohového vektoru můžeme spát

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3 . \quad (1.50)$$

Pro obloukový element platí, že

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} . \quad (1.51)$$

Budeme dále předpokládat, že souřadnicový systém je ortogonální, tj.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.52)$$

potom pro obloukový element (1.51) na základě vztahu (1.50) můžeme psát

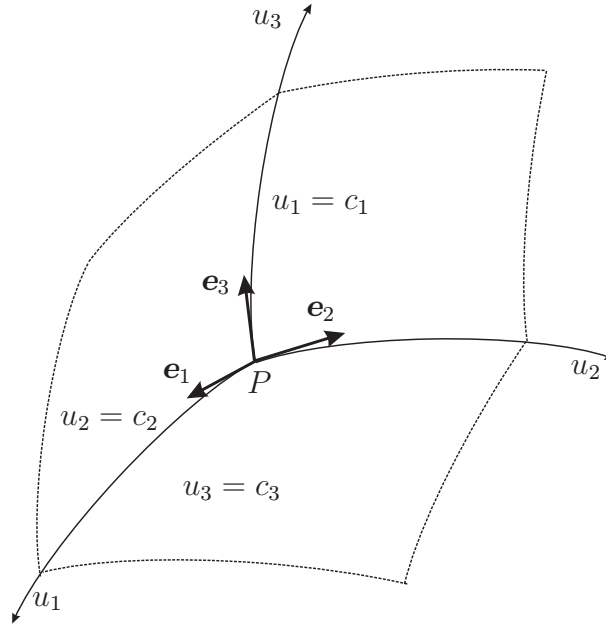
$$ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2 . \quad (1.53)$$

Pro objemový dostáváme

$$dV = |[(h_1 du_1 \mathbf{e}_1) \times (h_2 du_2 \mathbf{e}_2)] \cdot (h_3 du_3 \mathbf{e}_3)| = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (1.54)$$

neboť

$$|(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3| = 1 . \quad (1.55)$$



Obrázek 1.4: Obecné křivočaré souřadnice.

Cylindrická (válcová) souřadnicová soustava

Cylindrické souřadnice budeme značit ρ , φ , z , viz obr. 1.5. Mezi kartézskými a cylindrickými souřadnicemi platí následující transformační vztahy (viz (1.41))

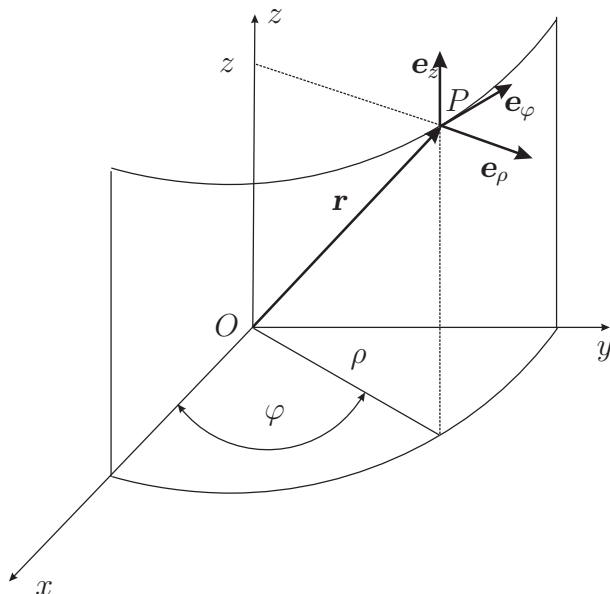
$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z, \quad (1.56)$$

kde (viz (1.39))

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x}, \quad z = z, \quad (1.57)$$

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi < \pi, \quad -\infty < z < \infty. \quad (1.58)$$

Zadáme-li poloměr $\rho = \rho_0$ kružnice v rovině (x,y) , pak to v prostoru představuje plášť kruhového válce



Obrázek 1.5: Cylindrické souřadnice

(souřadnicová plocha) s osou z rozprostírajícího se od $z = -\infty$ do $z = \infty$. Zvolíme-li určitou hodnotu úhlu $\varphi = \varphi_0$, vznikne tím v prostoru polorovina kolmá na rovinu (x,y) i cylindrickou plochu pláště válce. Průsečíkem této cylindrické plochy $\rho = \rho_0$ s polorovinou $\varphi = \varphi_0$ je přímka rovnoběžná s osou válce (osou z) a ležící na plášti válce. Položíme-li $z = z_0$, vznikne tím rovina rovnoběžná s rovinou (x,y) a protínající uvedenou přímku v bodě o cylindrických souřadnicích ρ_0, φ_0, z_0 . Obecný bod $P[\rho, \varphi, z]$ je tedy v cylindrické soustavě určen průsečíkem tří vzájemně kolmých souřadnicových ploch: cylindrické plochy a dvou rovin, jedná se tedy o křivočaré souřadnice.

Uvažujme polohový vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, za souřadnice x, y, z dosadíme vztahy (1.56), takže dostaneme

$$\mathbf{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z). \quad (1.59)$$

Nyní zderivujeme polohový vektor (1.59) podle jednotlivých cylindrických souřadnic, viz (1.47), kde $u_1 = \rho$, $u_2 = \varphi$ a $u_3 = z$ a vztahů (1.48), (1.49) určíme souřadnicové vektory a Laméovy koeficienty

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0), \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = (0, 0, 1), \end{aligned} \quad (1.60)$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= h_\rho = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2} = 1 , \\
h_2 &= h_\varphi = \sqrt{\rho^2(\sin \varphi)^2 + \rho^2(\cos \varphi)^2} = \rho , \\
h_3 &= h_z = \sqrt{1^2} = 1 ,
\end{aligned} \tag{1.61}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) , \\
\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) , \\
\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) .
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Dosadíme-li ze vztahů (1.60) a (1.61) do výrazů (1.50), (1.53), (1.54), pak dospějeme k následujícím vztahům platných pro cylindrický souřadnicový systém

$$d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi + dz\mathbf{e}_z , \tag{1.63}$$

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 , \tag{1.64}$$

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz . \tag{1.65}$$

Polární souřadnicová soustava

Někdy se pro popis pohybu v rovině hodí tzv. *polární* souřadnice, které jsou jistým případem cylindrických souřadnic, kdy $z = 0$. Polární souřadnice budeme značit ρ , φ , viz obr. 1.6, a tudíž vztah mezi kartézskými a polárními souřadnicemi platí následující transformační vztahy

$$x = \rho \cos \varphi , \quad y = \rho \sin \varphi , \tag{1.66}$$

kde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} , \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} . \tag{1.67}$$

Jelikož polární souřadnicový systém je jistým případem souřadnicového systému cylindrického, pak je možné pro Laméovy koeficienty a souřadnicové vektory psát, viz (1.61), (1.62), že

$$h_1 = h_\rho = \sqrt{(\cos \varphi)^2 + (\sin \varphi)^2} = 1 , \tag{1.68}$$

$$h_2 = h_\varphi = \sqrt{\rho^2(\sin \varphi)^2 + \rho^2(\cos \varphi)^2} = \rho .$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) , \tag{1.69}$$

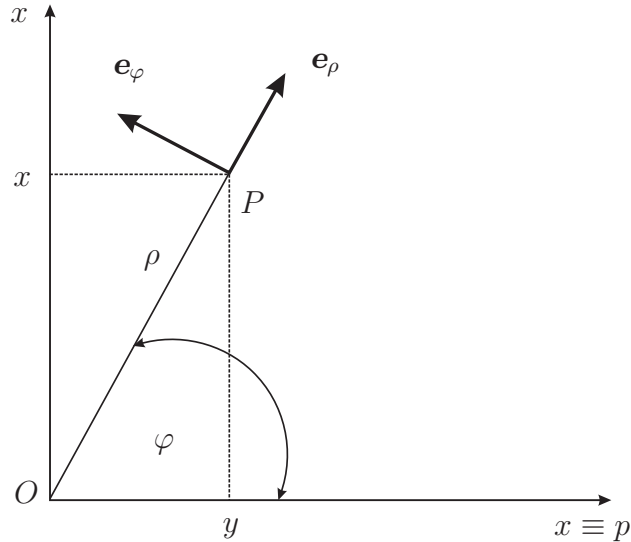
$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) .$$

Z výše uvedeného pro cylindrické souřadnice dostáváme pro infinitezimální změnu polohového vektoru

$$d\mathbf{r} = d\rho\mathbf{e}_\rho + \rho d\varphi\mathbf{e}_\varphi . \tag{1.70}$$

Pro obloukový element ds v případě polárních souřadnic platí

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 . \tag{1.71}$$



Obrázek 1.6: Polární souřadnice.

Sférická (kulová) souřadnicová soustava

Sférické souřadnice budeme značit r , ϑ , φ , viz obr. 1.7. Mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi platí následující transformační vztahy

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta, \quad (1.72)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arccos \frac{z}{r}, \quad \varphi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (1.73)$$

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (1.74)$$

Co se týče sférických souřadnic, tak souřadnici r nazýváme *průvodič*, ϑ nazýváme *deklinace* a φ *azimut*. Sférické souřadnice lze rovněž interpretovat pomocí tří vzájemně se protínajících ploch. Zadáme-li $r = r_0$ omezujeme množinu bodů na povrch koule o poloměru $r = r_0$. Úhlu $\vartheta = \vartheta_0$ odpovídá v prostoru plášť kužele s vrcholem v počátku souřadnic o rozvorovém úhlu (měřeného od osy z) $\vartheta = \vartheta_0$. Tato kuželová plocha protne povrch koule kolmo (každý poloměr koule je kolmý na povrch koule); průsečíkem je kružnice o poloměru $r \sin \vartheta = r_0 \sin \vartheta_0$. Zadáme-li $\varphi = \varphi_0$, vznikne rovina svírající s rovinou (x, z) úhel φ_0 . Tato rovina protne kolmo uvedenou kružnici v bodě o sférických souřadnicích $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$. Bod $P[r, \vartheta, \varphi_0]$ je ve sférických souřadnicích určen průsečíkem tří vzájemně kolmých ploch: koule, pláště kužele a roviny. Opět se tak setkáváme s případem *ortogonálních křivočarých souřadnic*.

Opět uvažujme polohový vektor $\mathbf{r} = (x, y, z)$, za souřadnice x, y, z dosadíme vztahy (1.72), takže dostaneme

$$\mathbf{r} = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta). \quad (1.75)$$

Nyní zderivujeme polohový vektor (1.75) podle jednotlivých cylindrických souřadnic, viz (1.47), kde $u_1 = r$, $u_2 = \vartheta$ a $u_3 = \varphi$ a vztahů (1.48), (1.49) určíme souřadnicové vektory a Laméovy koeficienty

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \cos \vartheta \sin \varphi, -r \sin \vartheta), \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (-r \sin \vartheta \sin \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, 0), \end{aligned} \quad (1.76)$$

$$\begin{aligned}
h_1 &= h_r = \sqrt{(\sin \vartheta \cos \varphi)^2 + (\sin \vartheta \sin \varphi)^2 + (\cos \vartheta)^2} = 1, \\
h_2 &= h_\vartheta = \sqrt{r^2(\cos \vartheta \cos \varphi)^2 + r^2(\cos \vartheta \sin \varphi)^2 + r^2(\sin \vartheta)^2} = r, \\
h_3 &= h_\varphi = \sqrt{r^2(\sin \vartheta \sin \varphi)^2 + r^2(\sin \vartheta \cos \varphi)^2} = r \sin \vartheta,
\end{aligned} \tag{1.77}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_r = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta), \\
\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_\vartheta = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta), \\
\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).
\end{aligned} \tag{1.78}$$

Dosadíme-li ze vztahů (1.76) a (1.77) do výrazů (1.50), (1.53), (1.54), pak dospějeme k následujícím vztahům platných pro sférický souřadnicový systém

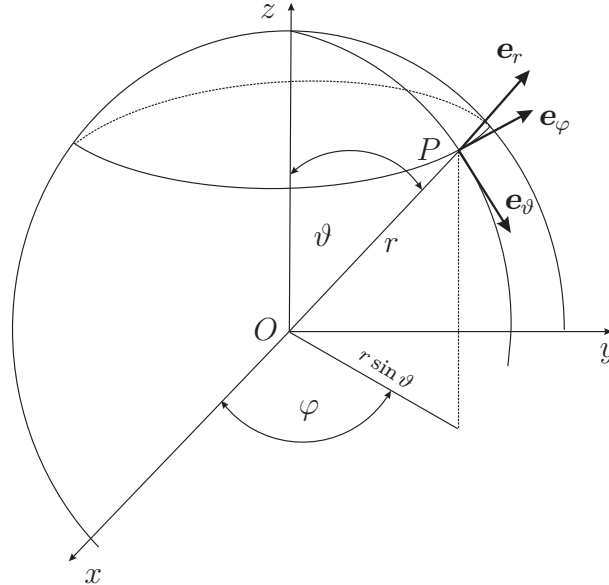
$$d\mathbf{r} = dr\mathbf{e}_r + r d\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi \mathbf{e}_\varphi, \tag{1.79}$$

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2, \tag{1.80}$$

$$dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi. \tag{1.81}$$

Podle obrázku 1.8 můžeme elementární plochu na kouli dS vyjádřit jako součin stran vyšrafovaného obdelníku, tj.

$$dS = (R d\vartheta)(R \sin \vartheta d\varphi) = R^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \tag{1.82}$$



Obrázek 1.7: Sférické souřadnice.

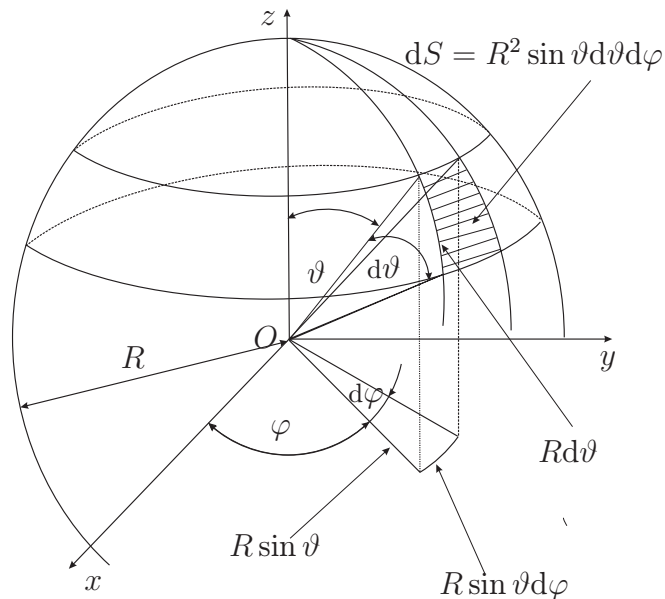
1.6 Vektorový počet

Nechť máme vektor $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, potom pro jeho velikost platí

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \tag{1.83}$$

Pro jednotkový vektor vektoru \mathbf{A} můžeme psát

$$\mathbf{A}^0 = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}, \quad |\mathbf{A}^0| = 1. \tag{1.84}$$



Obrázek 1.8: Element plochy dS na kouli.

Velikosti vektorů budeme nadále zapisovat jednodušším způsobem, kdy pro velikost použijeme stejného symbolu jako pro příslušný vektor, ale nebudeme ho již zapisovat tučně (v psané formě nebudeme používat orientované úsečky), tj.

$$|\mathbf{A}| \equiv A .$$

Na základě vztahu (1.84) můžeme tedy psát, že

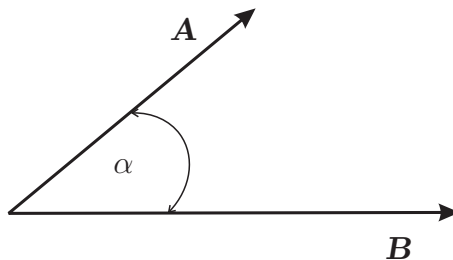
$$\mathbf{A} = A\mathbf{A}^0 . \quad (1.85)$$

Skalární součin

Výsledkem skalárního součinu mezi dvěma vektory je skalár. Mějme dva vektory $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ a $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$, potom skalární součin, který značíme tečkou mezi vektory, je roven

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z , \quad (1.86)$$

kde α je úhel, který spolu svírají vektory \mathbf{A} a \mathbf{B} , viz obr. 1.9. Velikost vektoru \mathbf{A} můžeme pomocí

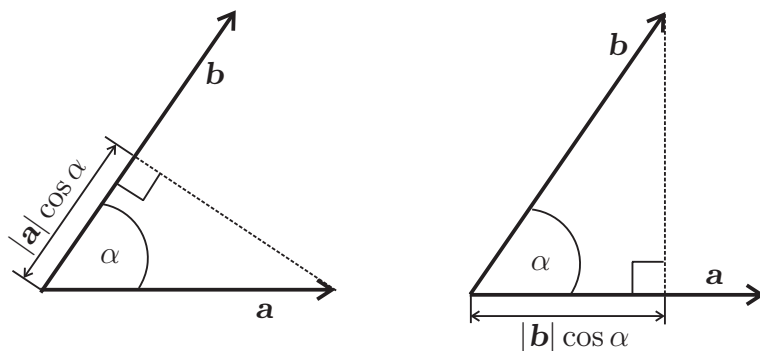


Obrázek 1.9: Skalární součin

skalárního součinu vyjádřit následujícím způsobem

$$A = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}} . \quad (1.87)$$

Vizuální význam skalárního součinu, viz obr. 1.10

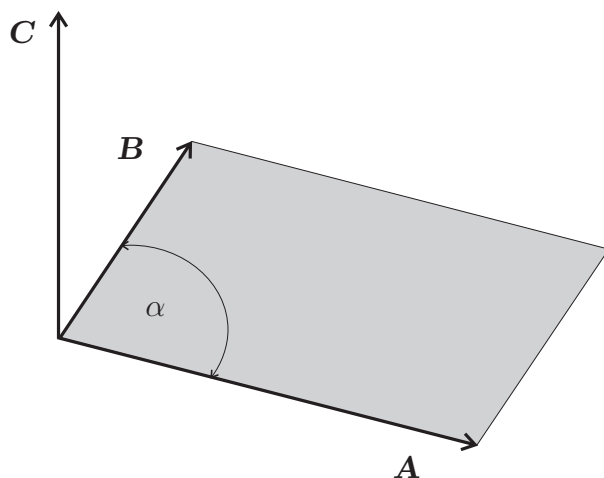


Obrázek 1.10: Vizuální význam skalárního součinu.

- velikost projekce vektoru \mathbf{b} na vektor \mathbf{a} vynásobená $|\mathbf{a}|$ nebo
- velikost projekce vektoru \mathbf{a} na vektor \mathbf{b} vynásobená $|\mathbf{b}|$.

Vektorový součin

Vektorový součin mezi dvěma vektory budeme značit symbolem \times . Výsledkem vektorového součinu je vždy vektor, který je k oběma vektorům kolmý, viz obr. 1.11. Vektorový součin není komutativní³ (na



Obrázek 1.11: Vektorový součin

rozdíl od součinu skalárního), tj.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} . \quad (1.88)$$

Výpočet vektorového součinu můžeme provést přes výpočet následujícího determinantu

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k} . \quad (1.89)$$

Vektory \mathbf{A} , \mathbf{B} a \mathbf{C} tvoří pravotočivý systém, takže k určení orientace vektoru \mathbf{C} , můžeme použít mnemotechnické pomůcky se šroubem, která byla zmíněna u kartézského souřadnicového systému.

Velikost vektorového součinu je dána následujícím vztahem

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \alpha . \quad (1.90)$$

³Je antikomutativní.

Velikost vektorového součinu je rovna ploše rovnoběžníku, viz obr. 1.11 (plocha vyznačena šedě).
Dále platí, že

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (1.91)$$

Pro složky vektoru \mathbf{C} můžeme psát

$$C_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} A_j B_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.92)$$

kde ε_{ijk} je tzv. *Levi-Civita symbol*, pro který platí

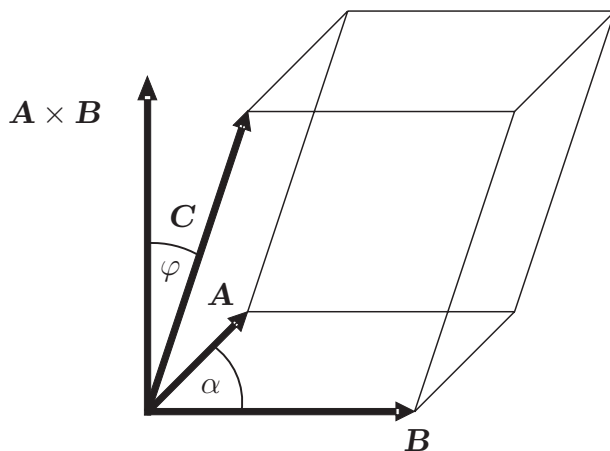
$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{jestliže indexy } i, j, k \text{ vytvářejí sudé permutace } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{jestliže indexy } i, j, k \text{ vytvářejí liché permutace } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{jestliže jakýkoliv index je roven jakémukoliv jinému indexu} \end{cases} \quad (1.93)$$

Sudou permutací rozumíme, že došlo k sudému počtu výměn pozice dvou symbolů, takže pak cyklická permutace je vždy sudá, tj. $123 \rightarrow 312 \rightarrow 231$. Tedy

$$\begin{aligned} \varepsilon_{122} = \varepsilon_{313} = \varepsilon_{211} &= 0 \quad \text{atd.} \\ \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} &= +1 \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} &= -1 \end{aligned} \quad (1.94)$$

Smíšený součin

Výsledkem smíšeného součinu je skalár, který je číselně roven objemu rovnoběžnostěnu, viz obr. 1.12. Smíšený součin vypočteme následovně



Obrázek 1.12: Smíšený součin.

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (A_x, A_y, A_z) \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \quad (1.95)$$

Pro objem rovnoběžnostěnu můžeme psát

$$V = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = ABC \cos \varphi \sin \alpha. \quad (1.96)$$

Pro smíšený součin platí cyklická záměna

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \quad (1.97)$$

Některé vektorové identity

Dvojitý vektorový součin

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (1.98)$$

Kvadrát vektorového součinu

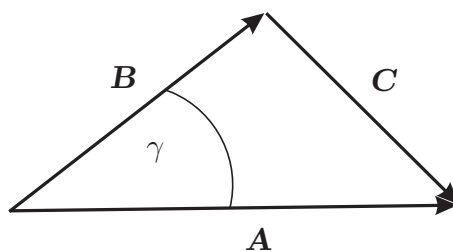
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})^2 = A^2 B^2 - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2. \quad (1.99)$$

1.6.1 Kosinová věta

Uvažujme tři vektorz \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , pro které platí, viz obr. 1.13, že

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}. \quad (1.100)$$

Na základě vztahu (1.100) musí platit, že



Obrázek 1.13: Situace pro vyjádření kosinové věty.

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - 2\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.101)$$

Na základě pravidla pro skalární součin můžeme rovnost (1.101) upravit do tvaru

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma, \quad (1.102)$$

který reprezentuje tzv. *kosinovou větu*.

Je-li $\gamma = \pi/2$, pak kosinová věta přechází ve větu Pythagorovu.

1.7 Křivkový integrál

Uvažujme sílu $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, která působí na hmotný bod pohybující se po křivce C , viz obr. 1.14. Křivku C si rozdělíme na jednotlivé orientované úseky $\Delta \mathbf{r}_i$. Můžeme-li předpokládat, že se směr a velikost síly \mathbf{F}_i nemění při jejím působení na hmotný bod po úsečce $|\Delta \mathbf{r}_i|$, potom práce, kterou tato síla vykoná je dána skalárním součinem

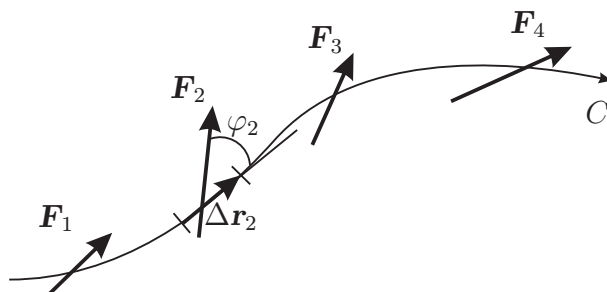
$$A_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i. \quad (1.103)$$

Zajímá-li nás celková práce, kterou vykoná síla při jejím působení na uvažovaný hmotný bod podél křivky C , pak ji přibližně určíme jako

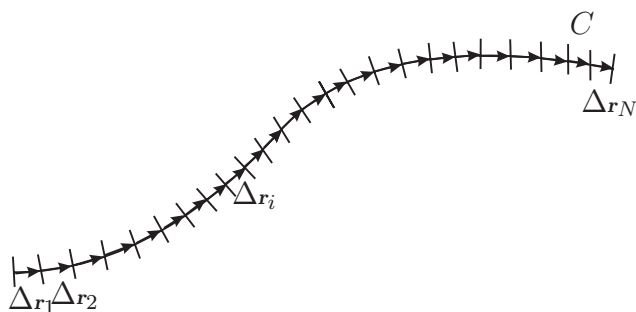
$$A \cong \sum_{\Delta \mathbf{r}_i}^N \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i = \sum_{\Delta r_i}^N F_i \Delta r_i \cos(\mathbf{F}_i, \Delta \mathbf{r}_i), \quad (1.104)$$

přičemž jsme křivku C rozdělili na N orientovaných úseků, viz obr. 1.15.

Budeme-li uvažovat infinitezimálně malé orientované úseky, tj. $d\mathbf{r}$, potom práci určíme přesně a bude



Obrázek 1.14: Práce podél křivky C , kde φ_2 je úhel, který svírají vektory \mathbf{F}_2 a $\Delta \mathbf{r}_2$.



Obrázek 1.15: Práce podél křivky C , kde φ_2 je úhel, který svírají vektory \mathbf{F}_2 a $\Delta \mathbf{r}_2$.

rovna následujícímu křivkovému integrálu

$$A = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{\Delta r_i \rightarrow 0} \sum_{\Delta r_i} \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{r}_i . \quad (1.105)$$

Ze vztahu (1.105) je patrné, že se jedná o limitní případ vztahu (1.104).

Výpočet křivkového integrálu

Nechť se práce koná po úseku křivky C z bodu P_1 do bodu P_2 , přičemž se obecně jedná o prostorovou křivku, která je v kartézských souřadnicích dána vztahem

$$\mathbf{r}(p) = [x(p), y(p), z(p)] , \quad (1.106)$$

kde p je parametr, např. čas, úhel apod., na kterým prostorová křivka závisí.

Pro vektorové pole $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ můžeme psát, že

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (F_x, F_y, F_z) , \quad (1.107)$$

přičemž pro jednotlivé složky platí

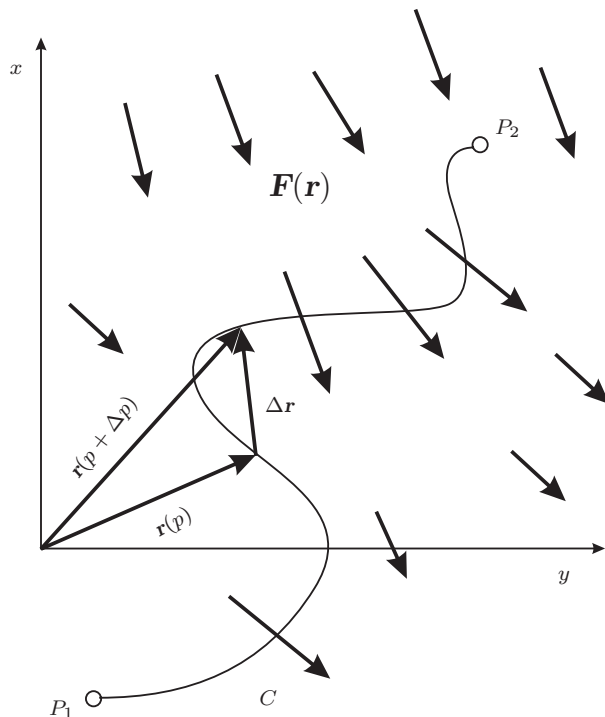
$$F_x = F_x(x, y, z) , \quad F_y = F_y(x, y, z) , \quad F_z = F_z(x, y, z) . \quad (1.108)$$

Protože potřebujeme znát komponenty vektoru \mathbf{F} podél uvažované křivky, dosadíme odpovídající složky (parametricky závislé souřadnice) křivky $\mathbf{r}(p)$ do složek F_x , F_y a F_z :

$$F_x(p) = F_x[x(p), y(p), z(p)] , \quad (1.109)$$

$$F_y(p) = F_y[x(p), y(p), z(p)] , \quad (1.109)$$

$$F_z(p) = F_z[x(p), y(p), z(p)] . \quad (1.110)$$



Obrázek 1.16: Cesta z bodu P_1 do bodu P_2 vektorovým polem $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Jelikož $\mathbf{r} = \mathbf{r}(p)$, pak pro totální diferenciál můžeme psát

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dp} dp . \quad (1.111)$$

Dosažením do vztahu (1.105) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C [F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)] \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \int_{p_1}^{p_2} \left\{ [F_x(x(p), y(p), z(p)), F_y(x(p), y(p), z(p)), F_z(x(p), y(p), z(p))] \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dp} \right\} dp = \\ &= \int_{p_1}^{p_2} \left[(F_x(p), F_y(p), F_z(p)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dp} \right] dp . \end{aligned} \quad (1.112)$$

Vzhledem k tomu, že

$$\frac{d\mathbf{r}}{dp} = \left(\frac{dx}{dp}, \frac{dy}{dp}, \frac{dz}{dp} \right) , \quad (1.113)$$

tak na závěr dostáváme

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{p_1}^{p_2} \left[F_x(p) \frac{dx(p)}{dp} + F_y(p) \frac{dy(p)}{dp} + F_z(p) \frac{dz(p)}{dp} \right] dp . \quad (1.114)$$

Příklad výpočtu

Uvažujme silové (obecně vektorové) pole

$$\mathbf{F} = (3x^2 - 6yz, 2y + 3xz, 1 - 4xyz^2)$$

a prostorovou křivku

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3) \quad (\text{zde je parametrem čas } t)$$

pro $0 \leq t \leq 2$.

$$\begin{aligned} x = t &\Rightarrow \dot{x} = 1, \\ y = t^2 &\Rightarrow \dot{y} = 2t, \\ z = t^3 &\Rightarrow \dot{z} = 3t^2. \end{aligned}$$

Dosazením do vztahu (1.114) dostaneme

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{p_1}^{p_2} \left[F_x(p) \frac{dx(p)}{dp} + F_y(p) \frac{dy(p)}{dp} + F_z(p) \frac{dz(p)}{dp} \right] dp \\ &= \int_0^2 [(3t^2 - 6t^5)1 + (2t^2 + 3t^4)2t + (1 - 4t^9)3t^2] dt = -4064. \end{aligned}$$

1.8 Vektorová analýza

Vektorovou funkci jedné proměnné můžeme zapsat následujícím způsobem

$$\mathbf{F}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (1.115)$$

Vektorové pole definujeme jako $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, což můžeme rozepsat jako

$$\mathbf{F} = F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k}. \quad (1.116)$$

Ze vztahu (1.116) vidíme, že jednotlivé složky jsou funkcemi souřadnic x , y a z . Někdy vektorové pole nazýváme zkráceně jen vektorem. Toto označení odráží fakt, že když dosadíme souřadnice bodu do vektorové funkce, tak dostaneme vektor!

Hamiltonův (nabla) operátor ∇ je dán v kartézských souřadnicích následujícím vztahem

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}. \quad (1.117)$$

Někdy můžeme místo ∇ také psát

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}. \quad (1.118)$$

Nabla operátor ∇ představuje symbolický vektor (vektorový operátor), který sám o sobě *nemá* význam. Pomocí nabla operátoru je možné vyjádřit následující tři operace

$$\nabla f \equiv \text{grad } f \quad - \text{ gradient ,}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \text{div } \mathbf{F} \quad - \text{ divergence ,}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \text{rot } \mathbf{F} \quad - \text{ rotace ,}$$

kde f je skalární funkce a \mathbf{F} je vektorová funkce.

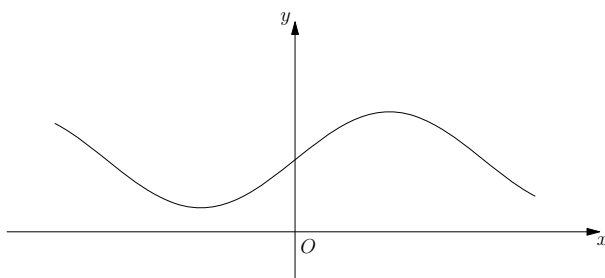
1.8.1 Gradient

Dříve, než přikročíme k vysvětlení gradientu funkce, budeme se zabývat funkcí pouze jedné proměnné, $f(x)$. Derivace této funkce $df/d(x)$ nám říká, jak rychle se funkce $f(x)$ mění, když změním její argument (proměnnou) o malou hodnotu dx , tj.

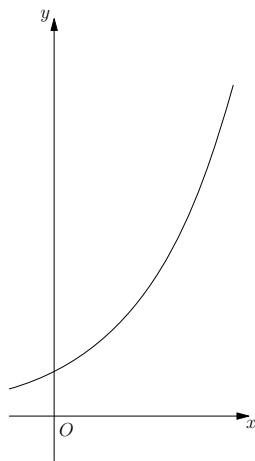
$$df = \left(\frac{df}{dx} \right) dx . \quad (1.119)$$

Jinými slovy můžeme říct, že změním-li x o hodnotu dx , pak funkce $f(x)$ se změní o hodnotu df . Derivace nám v tomto případě slouží jako jakýsi činitel úměrnosti. Takže, bude-li se funkce $f(x)$ měnit pomalu s proměnnou x , pak i derivace bude odpovídajícím způsobem malá, viz 1.17. Naopak, bude-li se funkce $f(x)$ měnit rychle v závislosti na proměnné x , potom i derivace této funkce bude náležitě velká, viz 1.18.

Z geometrického hlediska nám derivace $df/d(x)$ určuje sklon (strmost) grafu funkce $f(x)$ vzhledem k ose x . Budeme-li nyní předpokládat skalární funkci tří proměnných $f(x, y, z)$. Pro snadnější představu



Obrázek 1.17: Průběh pomalu se měnící funkce.



Obrázek 1.18: Průběh rychle se měnící funkce.

budeme předpokládat, že funkce $f(x, y, z)$ představuje funkci teploty, která nám určuje teplotu v každém bodě uvažované místnosti.

Chceme-li určit, jak se změní teplota, jestliže se posuneme o malou vzdálenost, pak je situace, na rozdíl od funkce jedné proměnné, výrazně složitější, protože záleží na směru v jakém se posuneme. Budeme-li se posouvat (přesněji nějaká teplotní sonda) svisle vzhůru, potom pravděpodobně bude teplota nejvíce narůstat, budeme-li se pro změnu posouvat ve směru horizontálním, pak se teplota nebude téměř měnit. Pro určení přírůstku (totálního diferenciálu) můžeme psát, že

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) dz . \quad (1.120)$$

Výraz (1.120) nám říká, jak se změní teplota, když změníme proměnné x, y, z o infinitezimální hodnoty dx, dy, dz .

Na základě pravidla pro skalární součin můžeme totální diferenciál (přírůstek) (1.120) vyjádřit jako

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.121)$$

kde

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} dx + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} dy + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} dz \quad (1.122)$$

je tzv. *gradient* funkce f pro kartézské souřadnice. Gradient funkce (obecně) ∇f je vektorová funkce. Rovnice (1.121) je jakousi třidimenzionální analogií rovnice (1.119).

Vzhledem k tomu, že gradient skalární funkce představuje funkci vektorovou, pak dosazením do argumentu gradientu funkce dostaneme vektor neboli můžeme říci, že gradient funkce má v daném bodě, stejně jako vektor, svoji velikost a směr. Pro vyjádření geometrického významu gradientu přepíšeme skalární součin (1.121) do tvaru

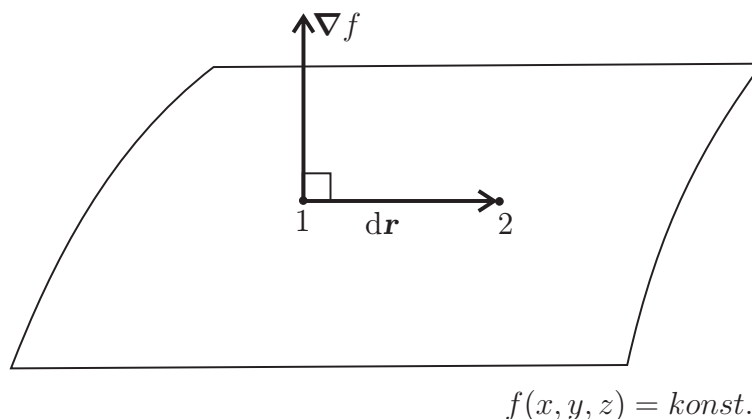
$$df = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r} = |\nabla f| |d\mathbf{r}| \cos \alpha, \quad (1.123)$$

kde α je úhel, který svírají v daném místě $|\nabla f|$ a $|d\mathbf{r}|$. Dále předpokládejme, že velikost $|d\mathbf{r}|$ je konstantní. Budeme hledat, pro který směr (tj. úhle α), dojde k největší změně funkce $f(x, y, z)$. Ze vztahu (1.123) je zřejmé, přírůstek df je největší, jestliže se posuneme ve směru ∇f .

Všimněme si, že z výrazu (1.123) vyplývá skutečnost, že maximální pokles dané funkce nastává v opačném směru než je směr maximálního růstu.

Je-li $\nabla f = \mathbf{0}$ v bodě $[x, y, z]$, pak $df = 0$ pro malé odchylky od tohoto bodu. Tento bod pak představuje tzv. *stacionární bod* funkce $f(x, y, z)$.

Uvažujme nyní plochu, která je tvořena body, pro něž funkce f nabývá stejné (konstantní) hodnoty.



Obrázek 1.19: Posuv z bodu 1 do bodu 2 v rámci jedné hladiny.

Tuto plochu nazýváme hladina⁴ funkce f a můžeme ji formálně vyjádřit jako $f(x, y, z) = konst.$. Na této ploše si vyznačíme dva blízké body 1 a 2. Změna polohového vektoru \mathbf{r} při přesunu z bodu 1 do bodu 2 se rovná $d\mathbf{r}$, viz obr. 1.19. Vzhledem k tomu, že body 1 a 2 leží na ploše $f(x, y, z) = konst.$ musí být přírůstek funkce (totální diferenciál) $df = 0$. Uplatníme-li tuto skutečnost, pak na základě vztahu (1.122) můžeme psát

$$df = 0 = (\nabla f) \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.124)$$

⁴V konkrétních případech mají hladiny i své speciální názvy, jako např. ekvipotenciální plochy, izobary, izotermy atd.

Vzhledem k tomu, že skalární součin v rovnosti (1.124) se rovná nule, je v místě bodu 1 vektor ∇f kolmý na vektor $d\mathbf{r}$. Jelikož vektor $d\mathbf{r}$ leží na ploše, je pak vektor ∇f v místě bodu 1 kolmý i na tuto plochu.

Příklad:

Uvažujme teplotní pole $t(x, y, z) = x^2yz^3 + yz + 2x$. Určete gradient této funkce a směr, ve kterém z bodu $P = [1, 2, 1]$ naměříme největší změnu teploty.

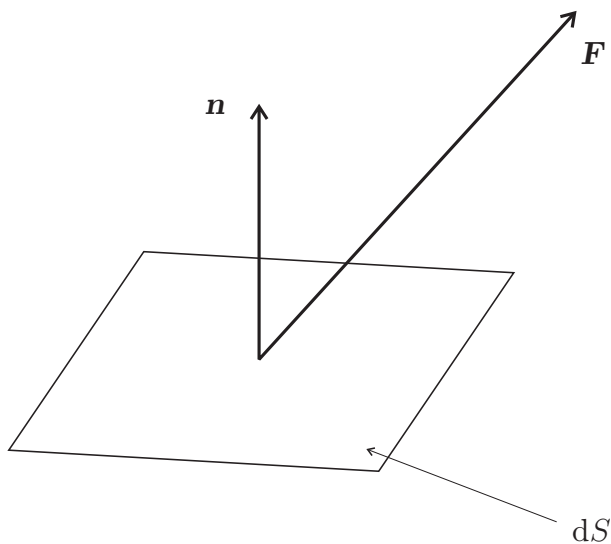
Gradient funkce t vede na následující vektorovou funkci

$$\nabla t = \frac{\partial t}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial t}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial t}{\partial z}\mathbf{k} = (2xyz^3 + 2)\mathbf{i} + (x^2z^3 + z)\mathbf{j} + (3x^2yz^2 + y)\mathbf{k}.$$

Dosadíme souřadnice bodu P do vektorové funkce a dostaneme vektor mající směr maximální změny vyšetřované funkce z uvažovaného bodu

$$6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

1.8.2 Divergence



Obrázek 1.20: Tok vektoru \mathbf{F} elementem plochy.

Tok $d\Psi$ vektoru \mathbf{F} elementem plochy dS , viz obr. 1.20, je možné vyjádřit jako

$$d\Psi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = F_n dS, \quad (1.125)$$

kde \mathbf{n} je vnější jednotkový normálový vektor uvažované plochy a F_n je složka vektoru \mathbf{F} ve směru normálového vektoru. Abychom vyjádřili skutečnost, že vektor \mathbf{F} a uvažovaná plocha mohou být vůči sobě libovolně orientovány, zavádíme vektorový element plochy $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$. To, že skalárnímu součinu příslušné vektorové veličiny a vektorového elementu říkáme tok, vychází z analogie z mechaniky kapalin, kde tok kapaliny elementární plochou je dán výrazem $d\Psi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$, kde \mathbf{v} představuje rychlost pohybu částice uvažované kapaliny (rychlost proudění). Tok kapaliny vyjadřuje množství kapaliny, která proteče za jednotku času uvažovanou plochou.

Uvažujme elementární krychli, viz obr. 1.21, o objemu $dV = dx dy dz$. Vyjádříme si tok vektoru \mathbf{F} , který

je umístěn do středu elementární krychle, jejími stěnami. Pro tento účel si označíme jednotlivé stěny (elementární plochy) krychle následujícím způsobem

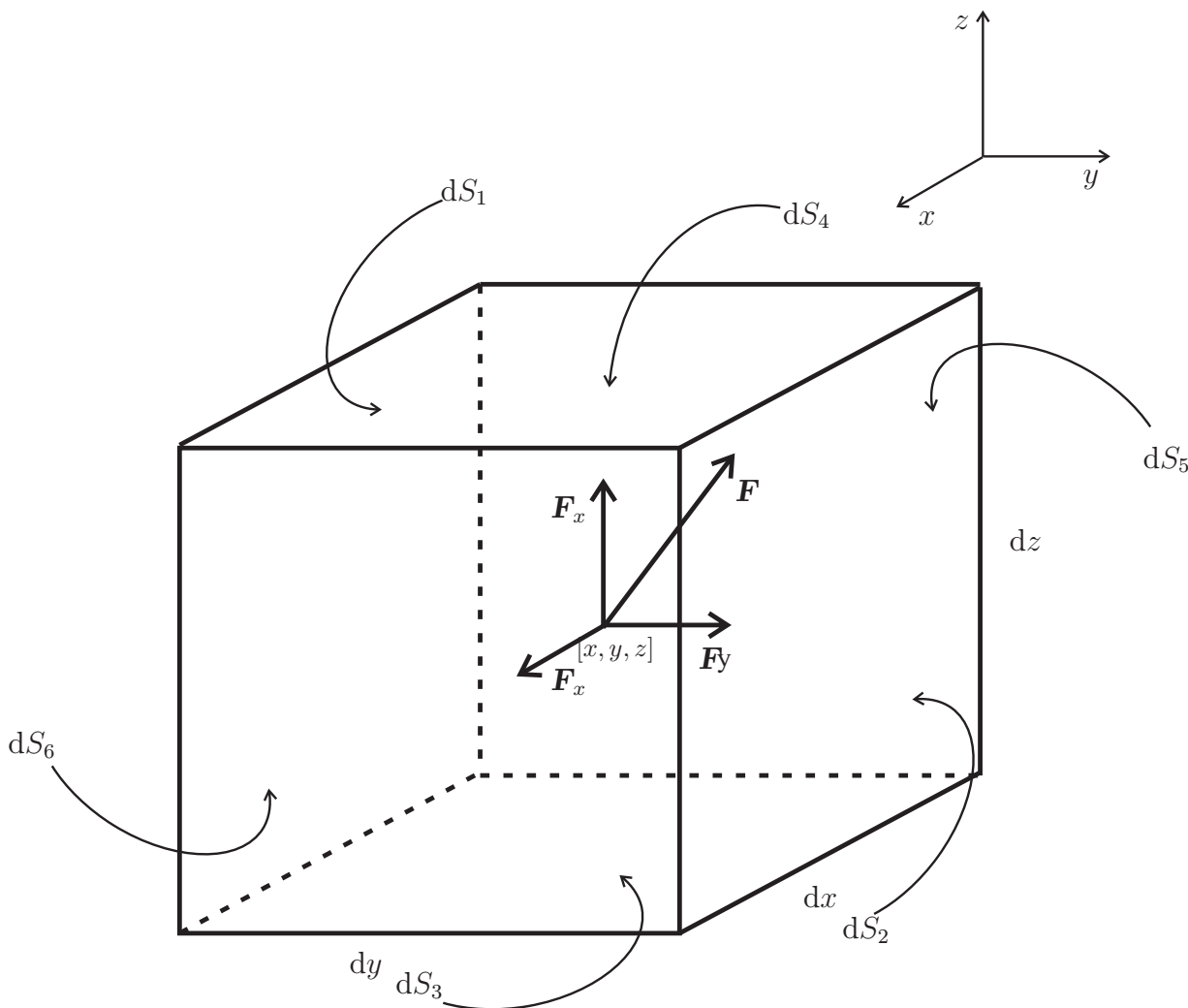
$$dS_1 = dS_2 = dx dz , \quad (1.126)$$

$$dS_1 = dS_2 = dx dz , \quad (1.127)$$

$$dS_1 = dS_2 = dx dz . \quad (1.128)$$

Příslušné jednotkové normálové vektory uvažovaných ploch označíme $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_5, \mathbf{n}_6$.

Pro elementární tok plochou dS_1 , viz obrázek 1.22, můžeme psát, že

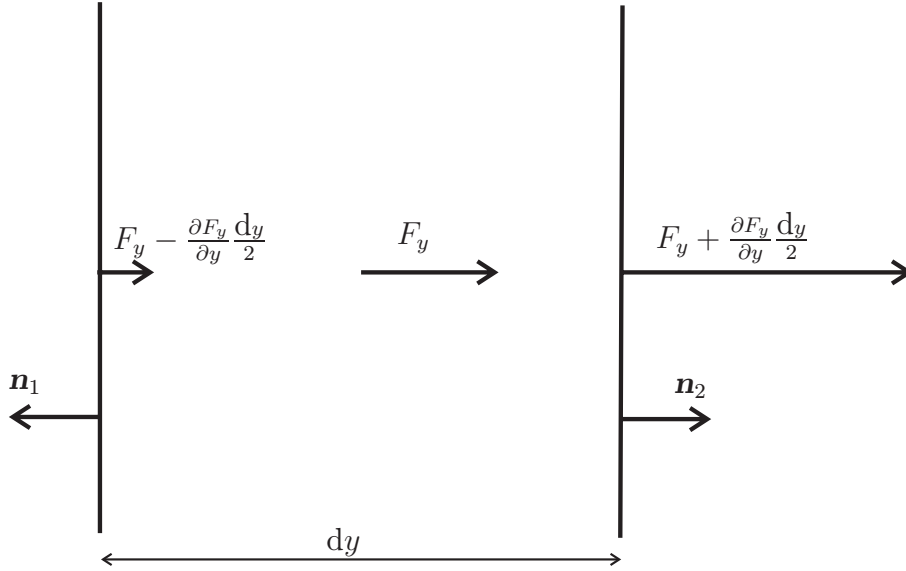


Obrázek 1.21: Tok vektoru \mathbf{F} z elementárního objemu.

$$d\Psi_1 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}_1 = - \left(F_y - \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dS_1 = \left(-F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz . \quad (1.129)$$

V rovnosti (1.129) byla zohledněna skutečnost, že $\mathbf{F}_y \uparrow \downarrow \mathbf{n}_1$, přičemž hodnota složky F_y v místě jejího průtoku plochou dS_1 byla určena pomocí Taylorova rozvoje, z kterého vyplývá, že

$$F_y \left(x, y - \frac{dy}{2}, z \right) = F_y(x, y, z) - \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2} . \quad (1.130)$$



Obrázek 1.22: Tok složky F_y plochami dS_1 a dS_2 (čelní pohled na elementární krychli).

Dále pro elementární tok plochou dS_2 (viz vztah 1.126) můžeme psát, že

$$d\Psi_2 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}_2 = \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dS_2 = \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx dz . \quad (1.131)$$

Ve vztahu (1.131) bylo pro určení složky F_y použito Taylorova rozvoje

$$F_y \left(x, y + \frac{dy}{2}, z \right) = F_y(x, y, z) + \frac{\partial F_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \quad (1.132)$$

a dále bylo vzato v úvahu, že $\mathbf{F}_y \uparrow\uparrow \mathbf{n}_y$.

Sečteme-li toky (1.129) a (1.131), tak dospějeme k následujícímu výsledku

$$d\Psi_1 + d\Psi_2 = \frac{\partial F_y}{\partial y} dx dy dz = \frac{\partial F_y}{\partial y} dV . \quad (1.133)$$

Podobným způsobem jako pro složku F_y odvodíme toky složek F_x a F_z zbývajících plochami elementární krychle, takže dostaneme

$$d\Psi_3 + d\Psi_4 = \frac{\partial F_z}{\partial z} dx dy dz = \frac{\partial F_z}{\partial z} dV . \quad (1.134)$$

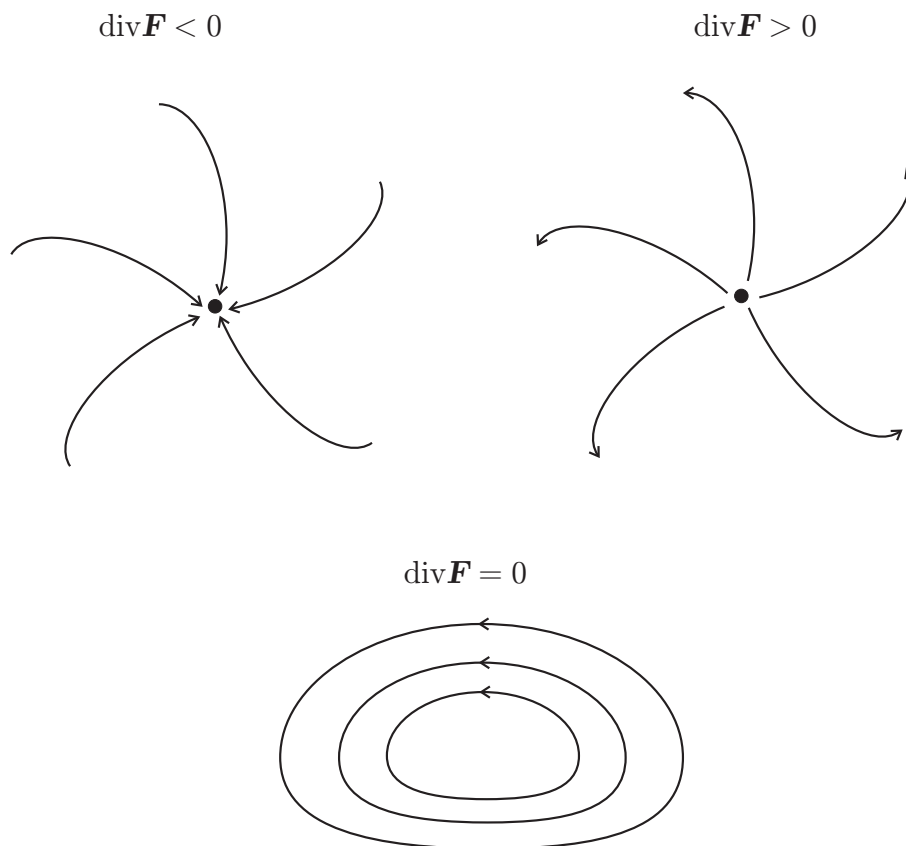
$$d\Psi_5 + d\Psi_6 = \frac{\partial F_x}{\partial x} dx dy dz = \frac{\partial F_x}{\partial x} dV . \quad (1.135)$$

Pro celkový tok všemi stěnami elementární krychle můžeme psát

$$d\Psi = \oint_{\text{krychle}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = d\Psi_1 + d\Psi_2 + d\Psi_3 + d\Psi_4 + d\Psi_5 + d\Psi_6 = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dV = \text{div} \mathbf{F} dV \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} dV , \quad (1.136)$$

kde div nebo $\nabla \cdot$ značí operátor *divergence*.

Ze vztahu (1.136) plyne, že divergence vektorové funkce v bodě $[x, y, z]$ je tok vektoru \mathbf{F} připadající na



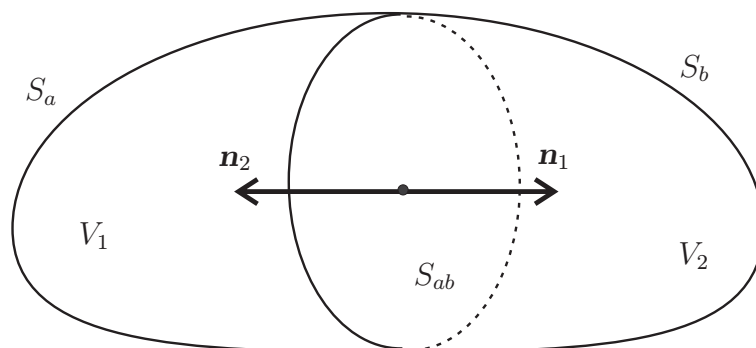
Obrázek 1.23: Charakteristika jednotlivých typů polí s ohledem na hodnotu $\operatorname{div}\mathbf{F}$ v uvažovaném bodě.

jednotkový objem v okolí $[x, y, z]$.

Na obr. 1.23 jsou zobrazeny tři typy polí pomocí orientovaných křivek, které mají tu vlastnost, že v každém jejich bodě je vektor \mathbf{F} ke křivce tečný⁵. Obecně se tyto čáry nazývají *vektorové čáry*.

Je-li $\operatorname{div}\mathbf{F} > 0$, pak je příslušný bod *zřídlem* (zde vektor „vzniká“), pro $\operatorname{div}\mathbf{F} < 0$ je tento bod *propadem* či *norem* (zde vektor „zaniká“) a platí-li pro všechny body, že $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, pak se jedná o tzv. pole *solenoidální* či *nezřídlové*.

Uvažujme uzavřenou plochu S , která uzavírá objem V , viz obr. 1.24. Pro tuto plochu můžeme psát, že



Obrázek 1.24: Tok uzavřenou plochou.

⁵Může se jednat např. o siločáry, proudové čáry, proudnice, indukční čáry apod.

$S = S_a + S_b$. Potom pro tok vektoru \mathbf{F} uzavřenou plochou S můžeme psát

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} . \quad (1.137)$$

Zavedeme si následující uzavřené plochy, viz obr. 1.24

$$S_1 = S_a + S_{ab} , \quad (1.138)$$

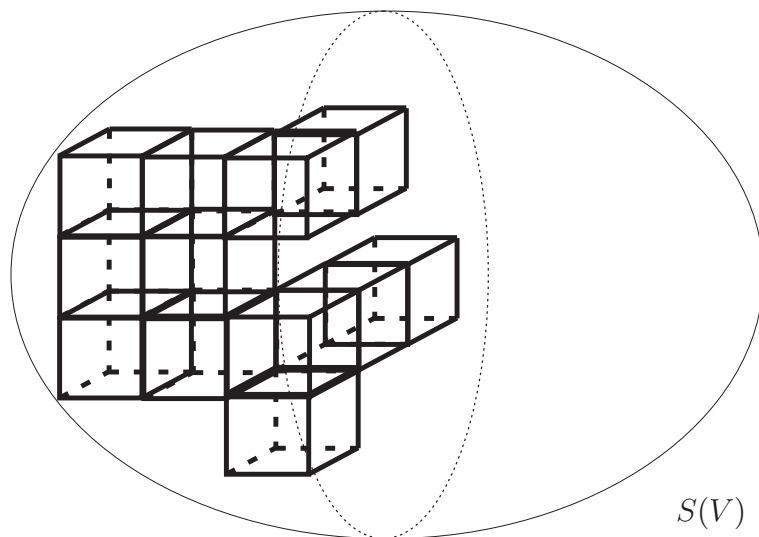
$$S_2 = S_b + S_{ab} . \quad (1.139)$$

Nyní sečteme toky vektoru \mathbf{F} těmito uzavřenými plochami

$$\oiint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \oiint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_{ab}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_{ab}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} . \quad (1.140)$$

V rovnosti (1.140) se nám odečetly toky vektoru \mathbf{F} plochou S_{ab} , jelikož v jednom případě tento vektor skrz tuto plochu vtéká a v druhém případě vytéká, přičemž co do velikosti jsou tyto toky stejné. Z výše uvedeného vyplývá, že toky společnými plochami se vždy vyruší!

Dále vyplníme plochu S uzavírající objem V elementárními krychlemi, viz obr. 1.25. Nasčítáme přes ob-



Obrázek 1.25: Vyplnění uzavřené plochy S elementárními krychlemi.

jem příspěvky toků skrz jednotlivými elementárními krychlemi, což můžeme zapsat pomocí objemového integrálu

$$\iiint \operatorname{div} \mathbf{F} dV . \quad (1.141)$$

Připomeňme, že tok elementární krychle je dán jako

$$\operatorname{div} \mathbf{F} dV .$$

Jelikož již víme, že se toky společnými stěnami vyruší, tak výsledný tok bude dán pouze tokem těch stěn elementárních krychle, které s žádnými jinými nesousedí. Tyto stěny tvoří plochu S uzavírající

objem V . Takže součet toků z elementárních krychlí vyplňujících objem V je roven toku vektoru \mathbf{F} skrz uzavřenou plochu S . Tuto skutečnost můžeme matematicky zapsat jako

$$\oiint_{S(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV, \quad (1.142)$$

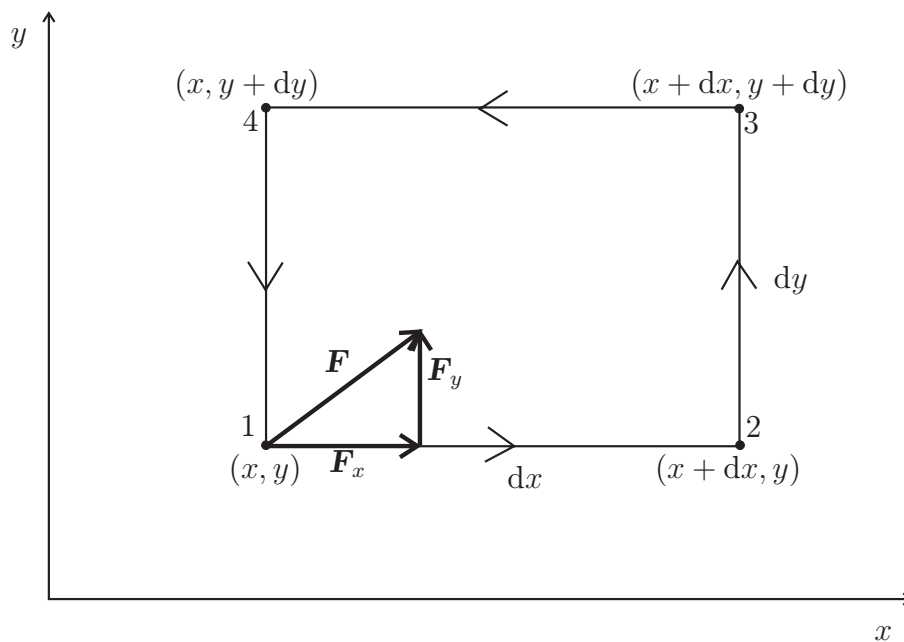
resp.

$$\oiint_{S(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV, \quad (1.143)$$

kde vztah (1.142), resp. (1.143) představuje matematický zápis *Gaussova teorému* (*Gaussovy věty*).

1.8.3 Rotace

Uvažujme vektorové pole $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$. Provedeme cirkulaci⁶ vektoru \mathbf{F} kolem elementárního obdelníka o elementární ploše $dS = dxdy$. Tento elementární obdelník se nachází v třírozměrném prostoru my si však souřadnicový systém zvolíme tak, aby tento ležel v rovině (x, y) , viz obrázek 1.26. Pro cirkulaci



Obrázek 1.26: Cirkulace vektoru \mathbf{F} kolem elementárního obdelníku.

vektoru \mathbf{F} kolem uvažovaného elementárního obdelníku můžeme psát

$$\oint_{\square} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_2^3 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_3^4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_4^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.144)$$

Uvědomíme-li si, že $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$ a $d\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, pak na základě pravidla pro skalární součin a s ohledem na obrázek 1.26 můžeme psát

$$\int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx, \quad (1.145)$$

⁶Cirkulací vektoru rozumíme křivkový integrál tohoto vektoru po uzavřené křivce.

$$\int_2^3 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \left(F_y + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx \right) dy, \quad (1.146)$$

$$\int_3^4 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \left(F_x + \frac{\partial F_x}{\partial y} dy \right) dx, \quad (1.147)$$

$$\int_4^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -F_y dy. \quad (1.148)$$

Na základě rovnosti (1.144) a rovnic (1.145)-(1.148) dostaneme

$$\oint_{\square} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F_x dx + F_y dy + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx dy - F_x dx - \frac{\partial F_x}{\partial y} dx dy - F_y dy = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dS. \quad (1.149)$$

Rotace je definována následovně

$$\text{rot} \mathbf{F} \equiv \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = (\nabla \times \mathbf{F})_x \mathbf{i} + (\nabla \times \mathbf{F})_y \mathbf{j} + (\nabla \times \mathbf{F})_z \mathbf{k}. \quad (1.150)$$

Porovnáním rovností (1.149) a (1.150) dostaneme

$$\oint_{\square} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\nabla \times \mathbf{F})_z dS = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.151)$$

kde $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n} = dS \mathbf{k}$.

Z výrazu (1.151) vyplývá, že cirkulace kolem elementárního obdelníku vektoru \mathbf{F} je dána skalárním součinem $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} \equiv \text{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, takže pro cirkulaci vektoru \mathbf{F} kolem libovolně v prostoru orientovaného elementárního obdelníku je dána výrazem

$$\oint_{\square} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \underbrace{(\nabla \times \mathbf{F})_n}_{\text{normálová složka}} dS = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.152)$$

kde $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$, viz obr. 1.27. Z rovnosti (1.152) vyplývá, že

$$(\nabla \times \mathbf{F})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\square} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{\Delta S}. \quad (1.153)$$

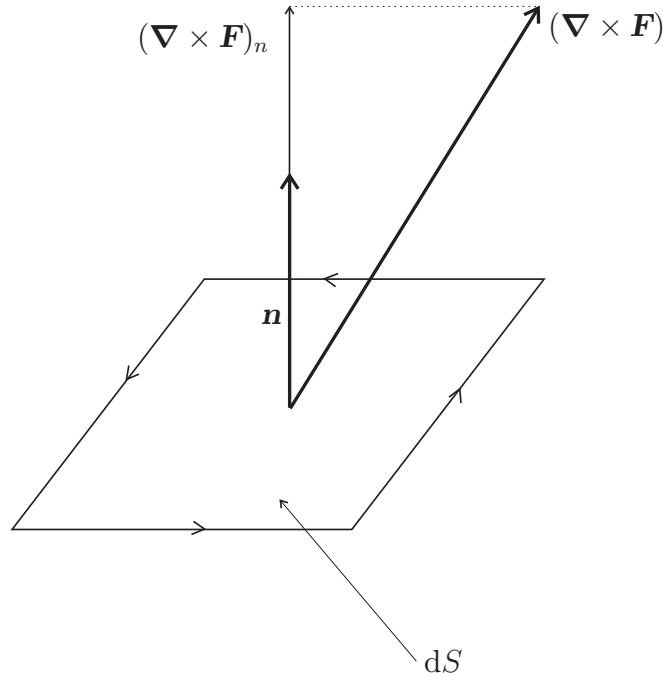
Navíc z rovnosti (1.152) plyne, že cirkulace vektoru (vektorové funkce) \mathbf{F} podél elementárního obdelníku uzavírajícího elementární plochu dS je rovna toku rotace této vektorové funkce elementární plochou dS . Platí-li pro všechny body, že $\text{rot} \mathbf{F} = \mathbf{0}$, pak říkáme, že se jedná o *nevírové* (*potenciálové*) vektorové pole. Uvažujme cirkulaci vektoru \mathbf{F} kolem nějaké uzavřené křivky C

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.154)$$

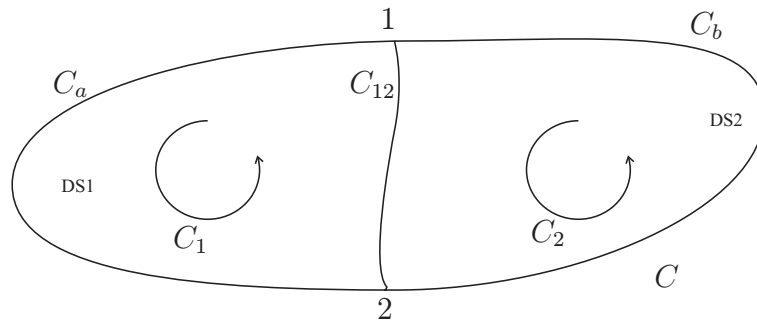
přičemž $C = C_a + C_b$.

Dále na základě obrázku 1.28 uvažujme následující uzavřené křivky

$$C_1 = C_a + C_{21}, \quad (1.155)$$



Obrázek 1.27: Orientace elementární plochy obdelníka a rotace vektorové funkce \mathbf{F} .



Obrázek 1.28: Uzavřené křivky.

$$C_2 = C_b + C_{12}, \quad (1.156)$$

kde křivka C_{12} značí křivku z bodu 1 do bodu 2 a křivka C_{21} značí křivku z bodu 2 do bodu 1.

Provedeme součet cirkulací vektoru \mathbf{F} kolem uzavřených křivek C_1 a C_2 a využijeme vztahů (1.155), (1.156) a (1.154)

$$\begin{aligned} \underbrace{\oint_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}_1} + \underbrace{\oint_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}_{(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}_2} &= \int_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_{21}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_{12}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \\ \int_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \\ \int_{C_a} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_b} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.157) \end{aligned}$$

Všimněte si, že při úpravách v rovnosti (1.157) bylo využito skutečnosti

$$\int_{C_{21}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_2^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Z rovnosti (1.157) vyplývá, že se příspěvky společných částí uzavřených křivek vždy vyruší. Tuto skutečnost můžeme zobecnit pro případ, který je zachycen na obrázku 1.29, kde plocha S , která je uzavřena křivkou C , je rozdělena na elementární plochy. Budeme-li provádět cirkulace kolem elementárních obdelníků vymezujících tyto elementární plochy, pak využijeme výše uvedeného faktu, že se příspěvky při integraci podél společných částí sousedících uzavřených křivek vyruší. Takže nám zůstanou jen příspěvky podél těch částí křivek, které s jinými nesousedí, tj. ve výsledku příspěvek z integrace funkce \mathbf{F} podél křivky C , která uzavírá již zmíněnou plochu S

$$\oint_{C(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (1.158)$$

Jelikož můžeme na základě rovnosti (1.152) vyjádřit cirkulaci vektoru kolem elementárního obdelníku tokem rotace tohoto vektoru elementární plochou, kterou tento obdelník vymezuje, je možné součet všech cirkulací kolem elementárních obdelníků vyjádřit jako součet toků rotací funkce \mathbf{F} elementárními plochami, které tyto obdelníky vymezují, tj.

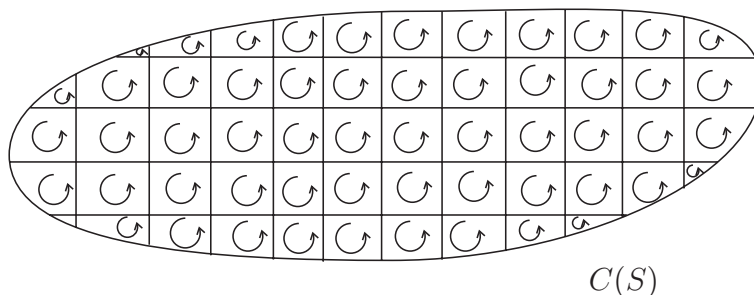
$$\oint_{C(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} , \quad (1.159)$$

resp.

$$\oint_{C(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot}\mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} . \quad (1.160)$$

Rovnost (1.159), resp. (1.160) je matematickým vyjádřením *Stokesova teoremu (Stokesovy věty)*.

Abychom si přiblížili fyzikální smysl vektoru rotace, tak použijeme malé sondy ve tvaru lopatkového

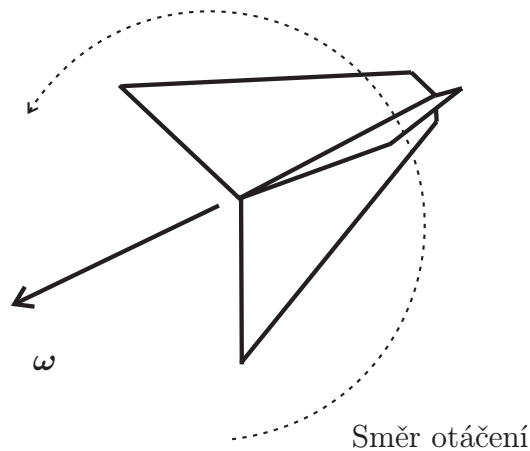


Obrázek 1.29: Rozdělení plochy S na jednotlivé elementární plochy.

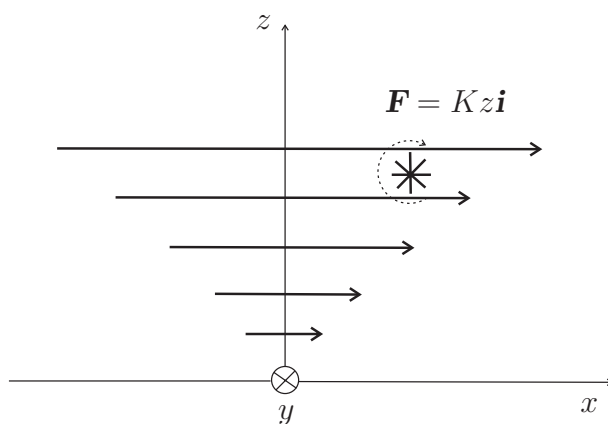
kola, viz obr. 1.30. Tuto sondu vložíme do proudící kapaliny neboli vložíme ji do rychlostního pole kapaliny $\mathbf{v}(x, y, z)$ a sonda se bude pohybovat různou rychlostí v závislosti na její poloze. Směr vektoru úhlové rychlosti otáčení sondy $\boldsymbol{\omega}$ určíme pomocí pravidla pravé ruky, kdy prsty ukazují směr otáčení a vztyčený palec směr vektoru $\boldsymbol{\omega}$. Předpokládejme, že sondu natáčíme kolem pevně zvoleného bodu. Sonda dosáhne maximální rychlosti tehdy, když vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ má směr vektoru rotace v bodě, kolem kterého uvažovanou sondu natáčíme (vektoru rotace leží na ose otáčení). Velikost rychlosti otáčení je úměrná velikosti vektoru rotace. V případě, že se sonda nebude při jakékoliv její orientaci otáčet, pak se jedná o nevírové rychlostí pole neboli $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (např. pro homogenní rychlostní pole).

Příklad:

Uvažujme následující vektorovou funkci (vektorové pole) $\mathbf{F} = Kz\mathbf{i}$, kde K je konstanta. Toto pole je zachycené na obrázku 1.31 pro $z > 0$. Určete rotaci tohoto pole a směr vektoru úhlové rychlosti pro



Obrázek 1.30: Sonda ve tvaru lopatkového kola.



Obrázek 1.31: Sonda ve tvaru lopatkového kola.

maximální rychlost otáčení.

Z obrázku 1.31 je zřejmé, bude-li osa otáčení sondy lopatkového kola ležet rovnoběžně s osou y , tak se tato sonda bude otáčet s maximální rychlostí. Použijeme-li pravidla pravé ruky, pak směr vektoru úhlové rychlosti ω bude shodný se s kladným směrem osy y neboli se směrem souřadnicového vektoru \mathbf{j} . Dále určíme rotaci uvažovaného pole, tedy

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \mathbf{j} = K \mathbf{j}.$$

Z výsledku je patrné, že směr rotace je shodný se směrem vektoru úhlové rychlosti ω pro maximální rychlost otáčení sondy.

1.8.4 Některé vektorové identity

Nejdříve si připomeneme některé rovnosti z vektorové algebry

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{skalár} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \quad (1.161)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \text{vektor} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}, \quad (1.162)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (1.163)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{pro } \mathbf{A} \perp \mathbf{B}, \quad (1.164)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (1.165)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}, \quad (1.166)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \quad (1.167)$$

V následující části si napíšeme některé identity. Jelikož si nabla operátor ∇ můžeme představit jako vektor, tak v některých případech pro jejich odvození využijeme analogie s některou z algebraických rovností (1.161) - (1.167).

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot (\nabla f) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (\nabla \cdot \nabla) f = \nabla^2 f = \Delta f = \text{skalární pole}, \end{aligned} \quad (1.168)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \nabla \times (\nabla f) = (\nabla \times \nabla) f = \mathbf{0} \quad \text{analogie s (1.163)}, \quad (1.169)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \mathbf{F} = 0 \quad \text{analogie s (1.166)}, \quad (1.170)$$

$$(\nabla \cdot \nabla) \mathbf{F} = \nabla^2 \mathbf{F} = \Delta \mathbf{F} = \text{vektorové pole}, \quad (1.171)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{F}) = \text{vektorové pole}, \quad (1.172)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} = \\ &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \Delta \mathbf{F} = \text{analogie s (1.167)}. \end{aligned} \quad (1.173)$$

Uvažujme polohový vektor

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (1.174)$$

Potom bude platit, že

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3, \quad (1.175)$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}. \quad (1.176)$$

Nechť \mathbf{k} je konstantní vektor, pak

$$\nabla(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{k}. \quad (1.177)$$

Uvažujme polohový vektor v čárkovaných souřadnicích

$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}. \quad (1.178)$$

Pro rozdíl polohových vektorů (1.174) a (1.178) můžeme psát

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' = (x - x')\mathbf{i} + (y - y')\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k}. \quad (1.179)$$

Dále pro velikost rozdílu polohových vektorů dospějeme k následujícímu vztahu

$$R = |\mathbf{R}| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}. \quad (1.180)$$

Platí, že

$$\frac{\partial 1/R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{-1/2} = \frac{\partial (R^2)^{-1/2}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{2(x - x')}{(R^2)^{3/2}} = -\frac{x - x'}{R^3}. \quad (1.181)$$

Obdobně

$$\frac{\partial 1/R}{\partial y} = -\frac{y - y'}{R^3}, \quad (1.182)$$

$$\frac{\partial 1/R}{\partial z} = -\frac{z - z'}{R^3}. \quad (1.183)$$

Pro gradient skalární funkce $1/R$ podle nečárkovaných souřadnic můžeme psát, že

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial 1/R}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial 1/R}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial 1/R}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1.184)$$

V gradientu (1.184) využijeme rovností (1.181), (1.182) a (1.183), čímž dostáváme

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{x - x'}{R^3} \mathbf{i} - \frac{y - y'}{R^3} \mathbf{j} - \frac{z - z'}{R^3} \mathbf{k}, \quad (1.185)$$

což s přihlédnutím ke vztahu (1.179) je možné po úpravě vyjádřit jako

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.186)$$

V případě, že bychom chtěli vyjádřit gradient funkce $1/R$ podle čárkovaných souřadnic, tj.

$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\partial 1/R}{\partial x'} \mathbf{i} + \frac{\partial 1/R}{\partial y'} \mathbf{j} + \frac{\partial 1/R}{\partial z'} \mathbf{k}. \quad (1.187)$$

Jelikož platí, že

$$\frac{\partial 1/R}{\partial x'} = \frac{x - x'}{R^3}. \quad (1.188)$$

Obdobně

$$\frac{\partial 1/R}{\partial y'} = \frac{y - y'}{R^3}, \quad (1.189)$$

$$\frac{\partial 1/R}{\partial z'} = \frac{z - z'}{R^3}, \quad (1.190)$$

je možné dospět po dosazení vztahů (1.188), (1.189) a (1.190) do výrazu (1.187) k následující rovnosti

$$\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{\mathbf{R}}{R^3} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (1.191)$$

Nechť jsou funkce $f = f(x, y, z)$ a $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ funkcemi nečárkovaných souřadnic, pak platí

$$\nabla' f(x, y, z) = \mathbf{0}, \quad (1.192)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 0, \quad (1.193)$$

$$\nabla' \times \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}, \quad (1.194)$$

Při vyjádření rovností (1.192), (1.193) a (1.194) se vycházelo ze skutečnosti, že nečárkované souřadnice x, y, z představují pro čárkované souřadnice x', y', z' , podle kterých se v operátorech derivuje, konstanty. Jsou-li funkce $f = f(x', y', z')$ a $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x', y', z')$ funkcemi čárkovaných souřadnic, pak podobně platí, že

$$\nabla f(x', y', z') = \mathbf{0}, \quad (1.195)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x', y', z') = 0, \quad (1.196)$$

$$\nabla \times \mathbf{F}(x', y', z') = \mathbf{0}. \quad (1.197)$$

Na základě identity (1.169) můžeme napsat větu:

Je-li $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, pak existuje taková skalární funkce f , pro kterou platí, že $\mathbf{F} = \nabla f$.

Na základě identity (1.170) můžeme napsat větu:

Je-li $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, pak existuje taková vektorová funkce \mathbf{A} , pro kterou platí, že $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{A}$.

1.9 Řešení obyčejných lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty

S obyčejnými lineárními diferenciálními rovnicemi druhého řádu s konstantními koeficienty se poměrně často setkáváme ve fyzice. Rovnici zmiňovaného typu můžeme zapsat jako⁷

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x), \quad (1.198)$$

resp.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = f(t), \quad (1.199)$$

kde a, b jsou konstanty. Rovnice (1.198), resp. (1.199) představuje nehomogenní diferenciální rovnici. Dále se budeme zabývat jen rovnicí (1.198), jelikož příslušné závěry jsou stejné i pro rovnici (1.199), jen provedeme záměnu proměnných x za t .

1.9.1 Lineární homogenní diferenciální rovnice

Zvláštní třídu diferenciálních rovnic představují rovnice homogenní ($f(x) = 0$), tj.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0. \quad (1.200)$$

Nyní budeme uvažovat homogenní diferenciální rovnici (1.200). Takovéto rovnice mají následující důležité vlastnosti:

1. Jestliže $y_1(x)$ je řešením rovnice (1.200), pak $C_1y_1(x)$, kde C_1 je konstanta, je také jejím řešením.
2. Jestliže $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou řešením rovnice (1.200), pak $y_1(x) + y_2(x)$ je také jejím řešením (princip *superpozice* - touto vlastností se vyznačují jen lineární diferenciální rovnice.).
3. Jestliže $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (1.200), pak *obecnému* řešení této rovnice odpovídá $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ (obecné řešení vždy obsahuje dvě libovolné konstanty).

Připomeňme, že funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou *lineárně nezávislé*, když je rovnice

$$\alpha y_1(x) + \beta y_2(x) \equiv 0 \quad (1.201)$$

splněna jen když $\alpha = \beta = 0$. Jestliže je rovnice (1.201) splněna pro konstanty α a β , kdy alespoň jedna je rozdílná od nuly, potom funkce $y_1(x)$ a $y_2(x)$ jsou *lineárně závislé*.

Obecnou podmínkou pro to, aby množina funkcí $y_1(x), y_2(x), \dots$ byla lineárně závislá, je že *wronskián* (*Wronskiho determinant*) W byl identicky roven nule, tj.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \quad (1.202)$$

⁷Prostorové derivace je možné pro jednoduchost značit pomocí čárek, např. $d^2y/dx^2 \equiv y''$ a časové derivace pomocí teček, např. $d^2y/dt^2 \equiv \ddot{y}$.

kde y^n představuje n -tou derivaci funkce y podle x .

Při popisu řady fyzikálních problémů se setkáváme s principem superpozice. Např. způsobí-li síla \mathbf{F}_1 kmit o výchylce x_1 a síla \mathbf{F}_2 kmit o výchylce x_2 , potom výsledná síla $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ způsobí výchylku $x_1 + x_2$. Je-li princip superpozice experimentálně ověřen, potom musí příslušné jevy být popsány lineárními diferenciálními rovnicemi.

Výše zmíněná 1. a 2. vlastnost se dá ověřit přímým dosazením do rovnice (1.200), kdežto bod 3. jen říká, co jest obecným řešením této rovnice⁸. Dále budeme hledat řešení rovnice (1.200) ve tvaru

$$y = \exp(\lambda x) , \quad (1.203)$$

kde λ je konstanta.

Takže dostáváme, že

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \exp(\lambda x) , \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 \exp(\lambda x) . \quad (1.204)$$

Dosazením výrazů (1.203) a (1.204) do rovnice (1.200) dostaneme

$$\lambda^2 \exp(\lambda x) + a\lambda \exp(\lambda x) + b \exp(\lambda x) = 0 . \quad (1.205)$$

Vynásobením rovnice (1.205) výrazem $\exp(-\lambda x)$ obdržíme algebraickou kvadratickou rovnici, která se nazývá *charakteristická rovnice*, tj.

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 . \quad (1.206)$$

Řešení charakteristické rovnice můžeme napsat jako

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b} . \quad (1.207)$$

Nejdříve předpokládejme, že dva kořeny λ_1 a λ_2 nejsou identické a tudíž řešením je (na základě principu superpozice) funkce

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = \exp(\lambda_1 x) + \exp(\lambda_2 x) . \quad (1.208)$$

Pro wronskian těchto dvou řešení platí

$$W = \begin{vmatrix} \exp(\lambda_1 x) & \exp(\lambda_2 x) \\ \lambda_1 \exp(\lambda_1 x) & \lambda_2 \exp(\lambda_2 x) \end{vmatrix} = \lambda_2 \exp[(\lambda_1 + \lambda_2)x] - \lambda_1 \exp[(\lambda_1 + \lambda_2)x] \neq 0 , \quad (1.209)$$

protože jsme předpokládali, že λ_1 a λ_2 nejsou identické, takže funkce, resp. řešení, $\exp(\lambda_1 x)$ a $\exp(\lambda_2 x)$ jsou lineárně nezávislé.

Takže obecným řešením je

$$y(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x) , \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 , \quad (1.210)$$

kde C_1 a C_2 nazýváme integračními konstantami a určíme je z okrajových, resp. počátečních⁹, podmínek. Určením integračních konstant přejde obecné řešení v řešení konkrétní.

Jestliže $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, pak se můžeme dosazením přesvědčit, že $x \exp(\lambda x)$ je také řešením rovnice (1.200). Protože $\exp(\lambda x)$ a $x \exp(\lambda x)$ jsou lineárně nezávislé, potom pro stejné kořeny charakteristické rovnice můžeme napsat následující obecné řešení

$$y(x) = C_1 \exp(\lambda x) + C_2 x \exp(\lambda x) , \quad \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda . \quad (1.211)$$

⁸Zmíněné vlastnosti jsou použitelné jen pro rovnici (1.200) a nikoliv pro rovnici (1.201).

⁹V případě, že hledaná funkce bude závislá na čase.

Příklad:

Řešte rovnici:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0 . \quad (1.212)$$

Řešení:

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0 . \quad (1.213)$$

Kořeny tedy jsou

$$\lambda_1 = 3 , \quad \lambda_2 = -1 . \quad (1.214)$$

Obecné řešení bude mít tvar

$$y(x) = C_1 \exp(3x) + C_2 \exp(-x) . \quad (1.215)$$

Příklad:

Řešte rovnici:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0 . \quad (1.216)$$

Řešení:

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0 . \quad (1.217)$$

Kořeny jsou v tomto případě stejné, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -2$. Obecné řešení můžeme napsat jako

$$y(x) = C_1 \exp(-2x) + C_2 x \exp(-2x) . \quad (1.218)$$

Nyní budeme předpokládat, že kořeny charakteristické rovnice jsou komplexní, tj.

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta , \quad (1.219)$$

kde α i β jsou reálné.

Využijeme-li Eulerova vztahu, pak můžeme psát, že

$$\exp(\lambda_1 x) = \exp(\alpha x) \exp(j\beta x) = \exp(\alpha)(\cos \beta x + j \sin \beta x) , \quad (1.220)$$

$$\exp(\lambda_2 x) = \exp(\alpha x) \exp(-j\beta x) = \exp(\alpha)(\cos \beta x - j \sin \beta x) . \quad (1.221)$$

Použitím rovností (1.220) a (1.221) můžeme po úpravě obecné řešení napsat v následujícím tvaru

$$y(x) = C_1 \exp(\lambda_1 x) + C_2 \exp(\lambda_2 x) = \exp(\alpha x)[(C_1 + C_2) \cos \beta x + j(C_1 - C_2) \sin \beta x] . \quad (1.222)$$

I v tomto případě jsou C_1 a C_2 libovolné, avšak navíc mohou být komplexní. Zavedeme předpoklad, že jsou tyto konstanty komplexně sdružené. Potom následujícími kombinacemi

$$A = C_1 + C_2 ; , \quad (1.223)$$

$$B = j(C_1 - C_2) ; , \quad (1.224)$$

získáme dvojici reálných konstant, pomocí kterých můžeme upravit tvar obecného řešení (1.222)

$$y(x) = \exp(\alpha x)(A \cos \beta x + B \sin \beta x) , \quad (1.225)$$

kde A a B nazýváme integrační konstanty, které určíme z okrajových, resp. počátečních, podmínek. Zavedeme následující konstantu $D = \sqrt{A^2 + B^2}$, kterou vynásobíme a podělíme obecné řešení (1.225)

$$y(x) = D \exp(\alpha x) \left(\frac{A}{D} \cos \beta x + \frac{B}{D} \sin \beta x \right). \quad (1.226)$$

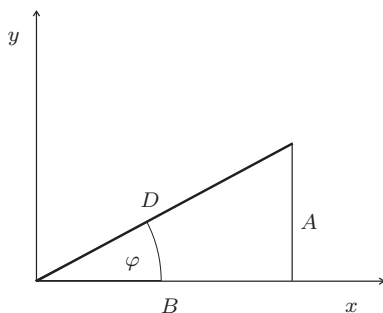
Nyní definujme úhel φ , viz obr. 1.32, takový, že

$$\sin \varphi = \frac{A}{D}, \quad \cos \varphi = \frac{B}{D}, \quad \tan \varphi = \frac{A}{B}. \quad (1.227)$$

Tímto můžeme obecné řešení (1.226) upravit do tvaru

$$y(x) = D \exp(\alpha x) (\sin \varphi \cos \beta x + \cos \varphi \sin \beta x) = D \exp(\alpha x) \sin(\beta x + \varphi), \quad (1.228)$$

kde konstanty D a φ rovněž určíme z okrajových, resp. počátečních, podmínek.



Obrázek 1.32: Vztah mezi konstantami.

Příklad:

Řešte rovnici:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 4y = 0. \quad (1.229)$$

Řešení:

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0. \quad (1.230)$$

Kořeny tedy jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = -1 \pm j\sqrt{3}. \quad (1.231)$$

Obecné řešení bude mít tvar

$$y(x) = \exp(-x)(A \cos \sqrt{3}x + B \sin \sqrt{3}x) \quad (1.232)$$

neboli

$$y(x) = D \exp(-x) \sin(\sqrt{3}x + \varphi). \quad (1.233)$$

1.9.2 Lineární nehomogenní diferenciální rovnice

Budeme řešit rovnici (1.198).

Nechť $y(x) = u(x)$ představuje obecné řešení homogenní rovnice (1.200) a necht' $y(x) = v(x)$ je *jakékoliv* řešení rovnice (1.198). Pak řešení $y(x) = u(x) + v(x)$ je řešením rovnice (1.198), protože

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = \underbrace{\left(\frac{d^2u}{dx^2} + a\frac{du}{dx} + bu\right)}_{=0} + \left(\frac{d^2v}{dx^2} + a\frac{dv}{dx} + bv\right) = 0 + f(x) . \quad (1.234)$$

Protože řešení $u(x)$ obsahuje dvě libovolné konstanty C_1 a C_2 , potom kombinace $u(x) + v(x)$ vyhovuje všem požadavkům obecného řešení rovnice (1.200). Funkce $u(x)$ představuje *komplementární (doplňkové)* řešení a $v(x)$ *partikulární (částčné)* řešení rovnice (1.198).

Obecná metoda nalezení řešení $u(x)$ byla popsána v části věnované homogenní diferenciální rovnici, takže zbývá „jen“ nalézt partikulární řešení, které představuje jakékoliv řešení rovnice

$$\frac{d^2v}{dx^2} + a\frac{dv}{dx} + bv = f(x) , \quad (1.235)$$

Často se dá ze struktury rovnice jedno partikulární řešení uhodnout.

Řešení $y(x) = u(x) + v(x)$ tedy představuje obecné řešení nehomogenní rovnice (1.198).

Příklad:

Řešte rovnici:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = x^2 + 2x . \quad (1.236)$$

Řešení:

Nejprve budeme hledat komplementární řešení, které představuje obecné řešení homogenní rovnice

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 ; . \quad (1.237)$$

Odpovídající charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 3)(\lambda + 2) = 0 . \quad (1.238)$$

Kořeny tedy jsou

$$\lambda_1 = -3 , \quad \lambda_2 = -2 . \quad (1.239)$$

Komplementární řešení bude mít tvar

$$y(x) = C_1 \exp(-3x) + C_2 \exp(-2x) . \quad (1.240)$$

Protože pravá strana řešené rovnice (1.236) představuje polynom druhého řádu, můžeme hledat partikulární řešení ve tvaru

$$v(x) = Ax^2 + Bx + C . \quad (1.241)$$

Potom

$$\frac{dv}{dx} = 2Ax + B , \quad (1.242)$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = 2A . \quad (1.243)$$

Dosazením výrazů (1.241), (1.242) a (1.243) do rovnice (1.236) dostaneme

$$2A + 5(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2 + 2x, \quad (1.244)$$

po úpravě obdržíme

$$(6A)x^2 + (10A + 6B)x + (2A + 5B + 6C) = x^2 + 2x. \quad (1.245)$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin na levé a pravé straně rovnice (1.245) obdržíme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 6A &= 1 \\ 10A + 6B &= 2 \\ 2A + 5B + 6C &= 0 \end{aligned} \quad (1.246)$$

Řešením této soustavy dostaneme, že

$$A = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{18}, \quad C = -\frac{11}{108}. \quad (1.247)$$

Dosazením konstant (1.247) do vztahu (1.241) získáme partikulární řešení

$$v(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{18}x - \frac{11}{108} = \frac{18x^2 + 6x - 11}{108}. \quad (1.248)$$

Obecné řešení rovnice (1.236) je pak dáno součtem komplementárního řešení (1.240) a partikulárního řešení (1.248), tedy

$$y(x) = C_1 \exp(-3x) + C_2 \exp(-2x) + \frac{18x^2 + 6x - 11}{108}. \quad (1.249)$$

Příklad:

Řešte rovnici:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 3x \cos x; \quad (1.250)$$

Řešení:

Nejprve budeme hledat komplementární řešení, které představuje obecné řešení homogenní rovnice

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0. \quad (1.251)$$

Odpovídající charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 4 = (\lambda + j2)(\lambda - j2) = 0. \quad (1.252)$$

Kořeny tedy jsou

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta = 0 + j2, \quad \lambda_2 = \alpha - j\beta = 0 - j2, \quad (1.253)$$

takže

$$\alpha = 0, \quad \beta = 2. \quad (1.254)$$

Komplementární řešení bude mít tvar

$$y(x) = \exp(\alpha x)(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x. \quad (1.255)$$

Při hledání partikulárního řešení vyjdeme ze skutečnosti, že derivováním pravé strany rovnice (1.250) $x \cos x$ dostaneme následující rovnice

$$x \cos x, \quad x \sin x, \quad \cos x, \quad \sin x. \quad (1.256)$$

Jelikož jsou tyto funkce lineárně nezávislé, můžeme vyjádřit partikulární řešení jako

$$v(x) = Ax \cos x + Bx \sin x + C \cos x + D \sin x, \quad (1.257)$$

$$\frac{dv(x)}{dx} = A(\cos x - x \sin x) + B(\sin x + x \cos x) - C \cos x + D \sin x, \quad (1.258)$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = A(2 \sin x + x \cos x) + B(2 \cos x - x \sin x) - C \cos x - D \sin x. \quad (1.259)$$

Dosazením výrazů (1.257), (1.258) a (1.259) do rovnice (1.250) po úpravě dostaneme

$$(3D - 2A) \sin x + (2B + 3C) \cos x + 3(A - 1)x \cos x + (3B)x \sin x = 0. \quad (1.260)$$

Koeficienty u jednotlivých členů se musí rovnat nule (vlastně se opět jedná o metodu porovnávání koeficientů u stejných členů), takže obdržíme

$$3D = 2A, \quad 2B = -3C, \quad A = 1, \quad 3B = 0 \quad (1.261)$$

odtud pak obdržíme

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = \frac{2}{3}. \quad (1.262)$$

Pak pro partikulární řešení dostáváme

$$v(x) = x \cos x + \frac{2}{3} \sin x. \quad (1.263)$$

Obecné řešení rovnice (1.250) je pak dáno součtem komplementárního řešení (1.255) a partikulárního řešení (1.263), tedy

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos -2x + x \cos x + \frac{2}{3} \sin x. \quad (1.264)$$